

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. "Tomislav i ja", reče Krešimir, "možemo završiti posao za 20 dana". No, ako bih (20) radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije."

"Imam bolju kombinaciju!" reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom."

Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

2. Riješi nejednadžbu (20)

$$||9 - x| - x| + 2x| \leq 2009.$$

3. Duljina osnovice jednakokravnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. (20) Točke P i Q su polovišta krakova \overline{AC} i \overline{BC} , a S i R su njihove ortogonalne projekcije na \overline{AB} . Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu \overline{SQ} .

4. Ako je $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, koliko je $ab + cd$? (20)

5. Ako realni brojevi x , y zadovoljavaju uvjet $2x + 4y = 1$ dokaži nejednakost $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$. (20)

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$.
(20)

2. Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe
(20)

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} \leq 2.$$

3. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na
(20) hipotenuzu \overline{AB} , točka E je polovište dužine \overline{CD} , a točka F je sjecište pravaca AE i BC . Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine \overline{AF} .

4. Točke A, B i C leže na istom pravcu i B je između A i C . S iste strane pravca AC
(20) konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R, |BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

5. Nađi sva rješenja jednadžbe $[x]\{x\} = 2009x$, gdje je $[x]$ najveći cijeli broj koji nije
(20) veći od x , a $\{x\} = x - [x]$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Nađi sva realna rješenja jednadžbe
(20)

$$4x^3 - \sqrt{1 - x^2} - 3x = 0.$$

2. Za realan broj $a > 0$, $a \neq 1$ dana je funkcija
(20)

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x + a^2 - a) = 2f(x).$$

3. Izračunaj zbroj
(20)

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos 2008 \cdot \cos 2009}.$$

4. Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r < R$) jednaka je a ($R - r <$
(20) $a \leq R + r$).

- a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a , R i r .
b) Izračunaj volumen stošca ako je $R = 10$, $r = 6$ i $a = 8$.

5. Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno
(20) prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za 45° . Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg
(20) i petog je -3 . Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan?
Koliki je taj zbroj?

2. U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2}, 0\right)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 0)$.
(20) Nađi sve točke pravca $y = x - 3$ iz koje se dužine \overline{AC} i \overline{BC} vide pod istim kutom
različitim od nule.

3. Koliki su minimum i maksimum funkcije
(20)

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}?$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

4. Nađi formulu za zbroj
(20)

$$S_n = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \frac{5}{3! + 4! + 5!} + \dots + \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

5. Kocka $ABCD A' B' C' D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu
(20) kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus
kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-1.1. (20 bodova) "Tomislav i ja", reče Krešimir, "možemo završiti posao za 20 dana". No, ako bih radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije."

"Imam bolju kombinaciju!" reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom."

Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

Rješenje. Označimo s x , y , z , tim redom, broj dana za koje bi posao obavili Tomislav, Krešimir, Ivan. Ako ukupni posao označimo s 1 onda je $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ dio posla koji bi obavili, tim redom, Tomislav, Krešimir, Ivan, za jedan dan. Prema uvjetu zadatka imamo sljedeće jednažbe:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

Treba riješiti ovaj sistem linearnih jednažbi.

Zbrajanjem ovih triju jednažbi, nakon sređivanja, dobivamo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}.$$

Radeći zajedno u jednom danu bi obavili $\frac{1}{10}$ ukupnog posla, tj. cjelokupan posao bi obavili za 10 dana.

Sada imamo:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30} \quad \text{tj.} \quad x = 30.$$

Slično se dobiva $y = 60$, $z = 20$. Dakle, Tomislav bi obavio cjelokupan posao za 30, Krešimir za 60, a Ivan za 20 dana.

Zadatak B-1.2. (20 bodova) Riješi nejednadžbu

$$||9 - x| - x| + 2x| \leq 2009.$$

Rješenje. Da bismo riješili ovu nejednadžbu moramo riješiti sljedeće dvije jednostavnije nejednadžbe:

$$\begin{aligned} -2009 &\leq ||9 - x| - x| + 2x \leq 2009, \quad \text{tj.} \\ -2009 - 2x &\leq ||9 - x| - x| \leq 2009 - 2x. \end{aligned}$$

Moramo promatrati dva slučaja:

$$1^\circ \quad 9 - x \leq 0 \quad \text{tj.} \quad x \geq 9,$$

$$2^\circ \quad 9 - x > 0 \quad \text{tj.} \quad x < 9.$$

1° U ovom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} -2009 - 2x &\leq |x - 9 - x| \leq 2009 - 2x, \\ -2018 &\leq 2x \leq 2000, \\ -1009 &\leq x \leq 1000, \end{aligned}$$

odakle imamo $x \in [9, 1000]$

2° Sada je

$$-2009 - 2x \leq |9 - 2x| \leq 2009 - 2x,$$

pa imamo ova dva slučaja:

$$2^\circ a \quad 9 - 2x \leq 0 \quad \text{tj.} \quad x \geq \frac{9}{2} \quad \text{tj.} \quad x \in \left[\frac{9}{2}, 9 \right),$$

$$2^\circ b \quad 9 - 2x > 0 \quad \text{tj.} \quad x < \frac{9}{2}.$$

2°a

$$\begin{aligned} -2009 - 2x &\leq 2x - 9 \leq 2009 - 2x, \\ -2000 &\leq 4x \leq 2018, \\ -500 &\leq x \leq \frac{1009}{2}, \end{aligned}$$

odakle je $x \in \left[\frac{9}{2}, 9 \right)$.

2°b

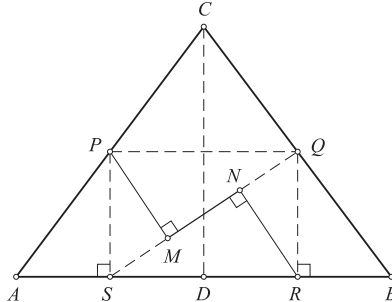
$$-2009 - 2x < 9 - 2x < 2009 - 2x \quad \text{tj.} \quad -2018 < 2000.$$

Kako je ova nejednakost uvijek zadovoljena dobivamo $x \in \left\langle -\infty, \frac{9}{2} \right\rangle$.

Konačno rješenje je $x \in \langle -\infty, 1000 \rangle$.

Zadatak B-1.3. (20 bodova) Duljina osnovice jednakokravnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. Točke P i Q su polovišta krakova \overline{AC} i \overline{BC} , a S i R su njihove ortogonalne projekcije na \overline{AB} . Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu \overline{SQ} .

Rješenje. Dužina \overline{PQ} je srednjica trokuta ABC pa je $|PQ| = \frac{1}{2}|AB| = 6$ cm.



Točka D je polovište stranice \overline{AB} . Primjenom Pitagorinog poučka imamo

$$|CD| = \sqrt{|BC|^2 - |BD|^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ cm.}$$

Točka Q je polovište kraka \overline{BC} pa je $|BQ| = |CQ| = 5$ cm.

Iz sličnosti trokuta BDC i BRQ imamo $\frac{|CD|}{|QR|} = \frac{|BD|}{|BR|} = \frac{2}{1}$ odakle je $|QR| = \frac{|CD|}{2} = 4$ cm. Četverokut $SRQP$ je pravokutnik i $|SR| = |PQ| = 6$ cm. Duljina njegove dijagonale je

$$|SQ| = \sqrt{|SR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}.$$

$$\text{Iz } P_{SRQ} = \frac{1}{2}P_{SRQP} \text{ imamo } |RN| = |PM| = \frac{P_{SRQP}}{|SQ|} = \frac{|SR| \cdot |QR|}{|SQ|} = \frac{12}{2\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Nadalje, po Pitagorinom poučku je } |NQ| = \sqrt{|QR|^2 - |RN|^2} = \sqrt{16 - \frac{144}{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Radi simetrije je } |SM| = |NQ| \text{ pa imamo } |MN| = |SQ| - 2|NQ| = \frac{10\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Tražena udaljenost nožišta je } |MN| = \frac{10\sqrt{13}}{13} \text{ cm.}$$

Zadatak B-1.4. (20 bodova) Ako je $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, koliko je $ab + cd$?

Prvo rješenje. Kako je $a^2 + b^2 = 1$ ne mogu istovremeno a i b biti jednaki 0. Neka je $a \neq 0$.

Iz treće jednakosti imamo $c = -\frac{bd}{a}$. Tada je

$$1 = c^2 + d^2 = \frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = \frac{d^2(a^2 + b^2)}{a^2} = \frac{d^2}{a^2}$$

odakle imamo $a^2 = d^2$. Sada je

$$ab + cd = ab - \frac{bd^2}{a} = \frac{b}{a}(a^2 - d^2) = 0.$$

Drugo rješenje. Dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= (ac + bd)(ad + bc) \\ &= a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd \\ &= ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) \\ &= ab + cd. \end{aligned}$$

Zadatak B-1.5. (20 bodova) Ako realni brojevi x , y zadovoljavaju uvjet $2x + 4y = 1$ dokaži nejednakost $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Prvo rješenje. Iz dane jednakosti imamo $x = \frac{1 - 4y}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{20} &= \left(\frac{1 - 4y}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1 - 10y + 25y^2}{5} = \frac{1}{5}(1 - 5y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

odakle se dobiva tražena nejednakost.

Drugo rješenje. Kao i u prvom rješenju imamo $x = \frac{1 - 4y}{2}$. Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{1 - 4y}{2}\right)^2 + y^2 = 5y^2 - 2y + \frac{1}{4} \\ &= 5\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{1}{25}\right) + \frac{1}{20} = 5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi tražena nejednakost.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-2.1. (20 bodova) Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$.

Prvo rješenje. Stavimo $u = \frac{z}{w} = x + yi$. Tada je $|u| = 1, |u - 1| = 1$.

Tada je $x^2 + y^2 = 1, (x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo $x = \frac{1}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $u = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Sada je

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{99} = u^{99} = \left[\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^{33} = \left(\frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}i\right)^{33} = (-1)^{33} = -1.$$

Drugo rješenje. Dijeljenjem dane jednakosti $|z| = |w| = |z - w|$ s $|w|$ dobivamo

$$\left|\frac{z}{w}\right| = 1 = \left|\frac{z}{w} - 1\right|.$$

Označimo li $u = \frac{z}{w}$ imamo $|u| = 1, |u - 1| = 1$.

Tada je $u \cdot \bar{u} = 1$ i $(u - 1)(\bar{u} - 1) = 1$.

Odavde je $1 = (u - 1)\left(\frac{1}{u} - 1\right) = -\frac{(u - 1)^2}{u}$, a nakon sređivanja $u^2 = u - 1$.

Množenjem ove jednakosti s u imamo $u^3 = u^2 - u = -1$.

Sada imamo $u^{99} = (u^3)^{33} = (-1)^{33} = -1$.

Dakle, $\left(\frac{z}{w}\right)^{99} = -1$.

Zadatak B-2.2. (20 bodova) Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{a}{x - b} + \frac{b}{x - a} \leq 2.$$

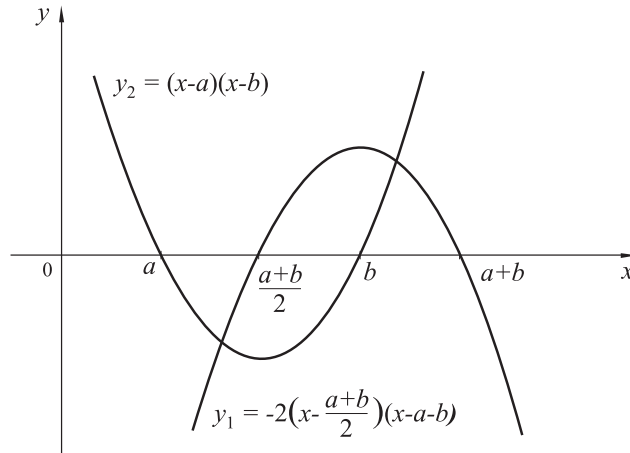
Prvo rješenje. Sređivanjem dane nejednakosti dobiva se

$$\frac{-2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2}{(x - a)(x - b)} \leq 0.$$

Budući da su nultočke brojnika $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{a + b}{2}$, a nazivnika $x_3 = a$, $x_4 = b$ te kako vrijedi

$$a < \frac{a + b}{2} < b < a + b$$

možemo skicirati grafove funkcija $y_1 = -2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2$, odnosno, $y_2 = (x - a)(x - b)$



Kako izraz mora biti ≤ 0 promotrimo gdje su grafovi sa suprotnih strana x -osi. Pri tome je $x \neq a$, $x \neq b$. Dakle,

$$x \in \langle -\infty, a \rangle \cup \left[\frac{a + b}{2}, b \right) \cup [a + b, \infty).$$

Drugo rješenje. Sređivanjem dane nejednakosti dobiva se

$$\frac{-2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2}{(x - a)(x - b)} \leq 0.$$

Moramo promatrati sljedeća dva slučaja:

1°

$$\begin{aligned} -2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2 &\leq 0 \\ (x - a)(x - b) &> 0 \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $-2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2 = 0$ su $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{a + b}{2}$.

Rješenje prve nejednadžbe je $x \in \left\langle -\infty, \frac{a + b}{2} \right] \cup [a + b, \infty)$, a druge $x \in \langle -\infty, a \rangle \cup \langle b, \infty)$

Kako je $0 < a < b$ imamo $a < \frac{a + b}{2}$, $b < a + b$, pa se dobiva $x \in \langle -\infty, a \rangle \cup [a + b, \infty)$.

2°

$$\begin{aligned} -2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2 &\geq 0 \\ (x - a)(x - b) &< 0 \end{aligned}$$

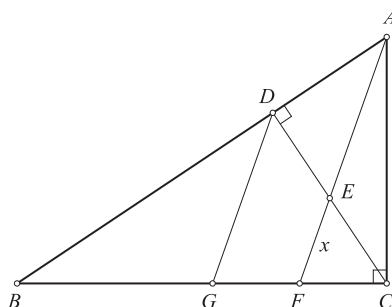
Rješenje prve nejednadžbe je $x \in \left[\frac{a+b}{2}, a+b \right]$, a druge $x \in \langle a, b \rangle$.

Rješenje sustava nejednadžbi pod 2° je $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right)$.

Rješenje polaznog sustava nejednadžbi je $x \in \langle -\infty, a \rangle \cup \left[\frac{a+b}{2}, b \right) \cup [a+b, \infty)$.

Zadatak B-2.3. (20 bodova) U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu \overline{AB} , točka E je polovište dužine \overline{CD} , a točka F je sjecište pravaca AE i BC . Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine \overline{AF} .

Rješenje. Iz jednakosti $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$ za pravokutan trokut ABC dobivamo $|CD| = 6$, a kako je E polovište dužine \overline{CD} , imamo $|DE| = 3$. Iz pravokutnog trokuta AED je $|AE| = 5$.



Neka je G točka na stranici \overline{BC} takva da je $DG \parallel AF$. Kako je \overline{EF} srednjica trokuta CDG , uz $|EF| = x$ vrijedi $|DG| = 2x$.

Iz sličnosti trokuta AFB i DGB slijedi jednakost $\frac{|AF|}{|DG|} = \frac{|AB|}{|DB|}$ tj. $\frac{5+x}{2x} = \frac{13}{9}$ odakle je $x = \frac{45}{17}$. Konačno je $|AF| = \frac{130}{17}$.

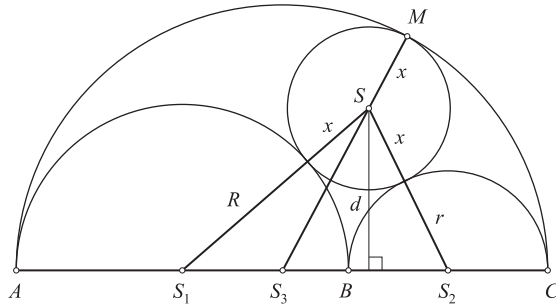
Zadatak B-2.4. (20 bodova) Točke A , B i C leže na istom pravcu i B je između A i C . S iste strane pravca AC konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R$, $|BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

Rješenje. Neka je S središte kružnice, polumjera x , koja dodiruje tri polukružnice i neka je d njezina udaljenost od pravca AC .

Neka su S_1 , S_2 , S_3 , tim redom, polovišta dužina \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} .

Sa slike dobivamo:

$$\begin{aligned}
|S_1S_3| &= |AS_3| - |AS_1| = (R+r) - R = r, \\
|S_2S_3| &= |CS_3| - |CS_2| = (R+r) - r = R, \\
|S_1S| &= R+x, \\
|S_2S| &= r+x, \\
|S_3S| &= |S_3M| - |SM| = R+r-x.
\end{aligned}$$



Površine trokuta S_1SS_3 i S_1SS_2 izrazit ćemo pomoću Heronove formule i pomoću osnovice i visine na nju:

$$\sqrt{(R+r)R(r-x)x} = \frac{1}{2}rd,$$

$$\sqrt{(R+r+x)Rrx} = \frac{1}{2}(R+r)d.$$

Kvadriranjem ovih jednadžbi i dijeljenjem jedne s drugom, nakon sređivanja, dobiva se

$$x = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Zadatak B-2.5. (20 bodova) Nađi sva rješenja jednadžbe $[x]\{x\} = 2009x$, gdje je $[x]$ najveći cijeli broj koji nije veći od x , a $\{x\} = x - [x]$.

Rješenje. Očito $x = 0$ zadovoljava jednadžbu.

Za $x > 0$ je $0 \leq [x] \leq x$, $0 \leq \{x\} < 1$, pa je $[x]\{x\} < x < 2009x$. U ovom slučaju nema rješenja.

Za $x < 0$ je $x = -p + \alpha$, gdje je $p = -[x]$ prirodan broj, a $\alpha = \{x\}$. Jednadžba sada glasi

$$(-p) \cdot \alpha = (-p + \alpha) \cdot 2009,$$

čije rješenje je $\alpha = \frac{2009p}{2009 + p}$.

Kako je $\alpha < 1$, imamo $\frac{2009p}{2009 + p} < 1$ tj. $p < \frac{2009}{2008}$. Zato je $p = 1$, $\alpha = \frac{2009}{2010}$ odakle je

$$x = -\frac{1}{2010}.$$

Dakle, jednadžba ima dva rješenja: $x = 0$, $x = -\frac{1}{2010}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-3.1. (20 bodova) Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0.$$

Prvo rješenje. Napišimo jednadžbu u obliku $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Da bi jednadžba bila definirana mora biti $1-x^2 \geq 0$ tj. $x \in [-1, 1]$. Zato možemo staviti $x = \sin \alpha$, gdje je $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sada jednadžba postaje

$$\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = 4\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha \quad \text{tj.} \quad |\cos \alpha| = -\sin 3\alpha.$$

Za $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je $\cos \alpha \geq 0$, pa jednadžba poprima oblik

$$\cos \alpha = -\sin 3\alpha \quad \text{tj.} \quad \sin 3\alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

Lijevu stranu možemo napisati u obliku produkta:

$$2 \sin \frac{3\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} = 0 \quad \text{tj.}$$

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Imamo dvije mogućnosti:

$$1^\circ \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Opće rješenje ove jednadžbe je $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$2^\circ \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

čije je opće rješenje $\alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Jednadžba ima tri rješenja u intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$.

Rješenja polazne jednadžbe su:

$$x_1 = \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$x_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Drugo rješenje. Jednadžbu zapišimo u obliku $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$. Da bi ona bila definirana mora biti 1) $1-x^2 \geq 0$, 2) $4x^3 - 3x = x(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) \geq 0$.

Prvi uvjet je zadovoljen za $x \in [-1, 1]$, a drugi za $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$.

Oba uvjeta su zadovoljena za $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

Kvadriranjem jednadžbe i sređivanjem dobivamo

$$16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0.$$

Uz supstituciju $t = x^2$ imamo $16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = 0$. Faktorizacijom dobivamo

$$(2t - 1)(8t^2 - 8t + 1) = 0.$$

Jednadžba se svodi na sljedeće dvije:

1) Rješenje jednadžbe $2t - 1 = 0$ je $t = \frac{1}{2}$. Zadovoljava samo $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Rješenja kvadratne jednadžbe $8t^2 - 8t + 1 = 0$ su $t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$. Odavde se dobije $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$. Zadovoljavaju samo rješenja $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ i $x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Time su dana sva tri rješenja polazne jednadžbe.

Zadatak B-3.2. (20 bodova) Za realan broj $a > 0$, $a \neq 1$ dana je funkcija

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x + a^2 - a) = 2f(x).$$

Rješenje. Da bi jednadžba imala rješenje moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad x > a - a^2.$$

Kako je $\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{1}{2} \log_a x$ zadana funkcija je $f(x) = \frac{3}{2} \log_a x$.

Iz $f(x + a^2 - a) = 2f(x)$ dobivamo

$$\frac{3}{2} \log_a(x + a^2 - a) = 2 \cdot \frac{3}{2} \log_a x \quad \text{tj.} \quad \log_a(x + a^2 - a) = \log_a x^2. \quad (1)$$

Iz logaritamske jednadžbe (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - x + a - a^2 = 0$.

Riješimo ju faktorizacijom:

$$0 = x^2 - a^2 - (x - a) = (x - a)(x + a) - (x - a) = (x - a)(x + a - 1).$$

Njezina rješenja su $x_1 = a$, $x_2 = 1 - a$.

Prvo rješenje ima smisla za svaki pozitivan a osim za $a = 1$, a drugo za $a \in \langle 0, 1 \rangle$.

Naime, za $x_1 = a$ imamo $a > a - a^2$ tj. $a^2 > 0$, što je istinito za svaki a .

Za $x_2 > 0$ dobivamo $1 - a > 0$, odnosno $a \in \langle 0, 1 \rangle$ i za $x_2 = 1 - a$ mora biti $1 - a > a - a^2$ tj. $(a - 1)^2 > 0$ pa je x za dopuštene a uvijek definiran.

Zadatak B-3.3. (20 bodova) Izračunaj zbroj

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos 2008 \cdot \cos 2009}.$$

Rješenje. Uočimo n -ti član izraza $\frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cos n}$ i preuredimo ga

$$\begin{aligned} \frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cos n} &= \frac{\sin[n - (n-1)]}{\cos(n-1) \cos n} \\ &= \frac{\sin n \cos(n-1)}{\cos(n-1) \cos n} - \frac{\cos n \sin(n-1)}{\cos(n-1) \cos n} \\ &= \operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n-1). \end{aligned}$$

Sada zbroj postaje

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0 + \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1 + \dots + \operatorname{tg} 2008 - \operatorname{tg} 2007 + \operatorname{tg} 2009 - \operatorname{tg} 2008 \\ &= \operatorname{tg} 2009 - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} 2009. \end{aligned}$$

Zadatak B-3.4. (20 bodova) Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r < R$) jednaka je a ($R - r < a \leq R + r$).

- Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a , R i r .
- Izračunaj volumen stošca ako je $R = 10$, $r = 6$ i $a = 8$.

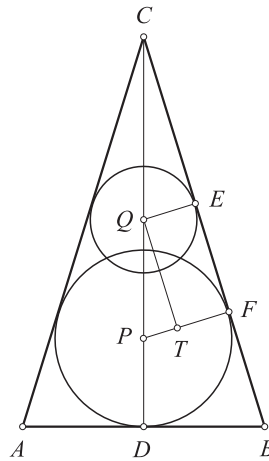
Rješenje. a) Neka je polumjer osnovke stošca $|BD| = x$, a visina $|CD| = y$. Točke E i F su na dužini \overline{BC} , T na \overline{PF} i četverokut $QTFE$ je pravokutnik.

Iz sličnosti trokuta QEC i PTQ imamo $\frac{|QC|}{|QE|} = \frac{|PQ|}{|PT|}$, a odavde

$$\frac{y - R - a}{r} = \frac{a}{R - r}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$y = \frac{(a + R - r)R}{R - r}. \quad (1)$$



Iz sličnosti trokuta BDC i PTQ imamo $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|PT|}{|QT|}$, odnosno

$$\frac{x}{y} = \frac{R - r}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobivamo $x = y \cdot \frac{R - r}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}$ tj.

$$x = R \sqrt{\frac{a + R - r}{a - R + r}}. \quad (3)$$

Iz (1), (2) i (3) imamo

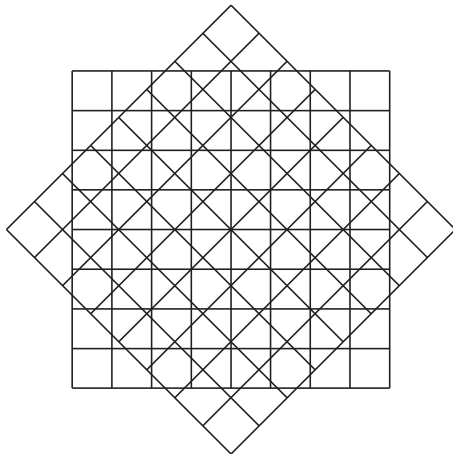
$$V = \frac{x^2 \pi \cdot y}{3} = \frac{R^3 (a + R - r)^2 \pi}{3(R - r)(a - R + r)}.$$

b) U specijalnom slučaju za $R = 10$, $r = 6$, $a = 8$ dobivamo $V = 3000\pi$.

Zadatak B-3.5. (20 bodova) Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za 45° . Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

Rješenje. Označimo:

- S_{cc} - zbroj svih zajedničkih površina crnih polja gornje i donje ploče,
- S_{cb} - zbroj svih zajedničkih površina crnih polja gornje i bijelih polja donje ploče,
- S_{bc} - zbroj svih zajedničkih površina bijelih polja gornje i crnih polja donje ploče,
- S_{bb} - zbroj svih zajedničkih površina bijelih polja gornje i donje ploče.



Tada vrijedi $S = S_{cc} + S_{cb} + S_{bc} + S_{bb}$, gdje je S površina pravilnog osmerokuta koji je presjek dviju ploča.

Nazovimo položaj ploča na slici početnim.

Ako zarotiramo gornju ploču za 90° oko njezinog središta, crna polja te ploče će doći na mjesta njenih bijelih polja iz početnog položaja, pa je $S_{cc} = S_{bc}$ i $S_{cb} = S_{bb}$.

Ako zarotiramo donju ploču za 90° oko njenog središta, njena crna polja će doći na mjesta njenih bijelih polja iz početnog položaja, pa je $S_{cc} = S_{cb}$, $S_{bc} = S_{bb}$ tj.

$$S_{cc} = S_{cb} = S_{bc} = S_{bb} \quad \text{odnosno} \quad S_{cc} = \frac{1}{4}S.$$

Nadalje, površina osmerokuta je jednaka površini kvadrata (šahovske ploče) umanjene za četverostruku površinu odsječenog trokuta, tj. $S = 64 - 4P$.

Odsječeni trokut je pravokutan jednakokrčan trokut, pa je njegova baza jednaka dvostrukoj visini, tj. $a = 2v$.

Ako s d označimo duljinu dijagonale šahovske ploče, visina trokuta je $v = \frac{d - a}{2} = 4(\sqrt{2} - 1)$.

Površina trokuta je $P = \frac{av}{2} = v^2 = 16(3 - 2\sqrt{2})$.

Dakle, $S = 64 - 4P = 128(\sqrt{2} - 1)$.

Konačno je $S_{cc} = 32(\sqrt{2} - 1)$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-4.1. (20 bodova) U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg i petog je -3 . Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan? Koliki je taj zbroj?

Rješenje. Članove niza ćemo prikazati pomoću prvog člana a_1 i razlike niza d .

Prema uvjetu zadatka imamo ove dvije jednačbe:

$$\begin{aligned}(a_1 + d)(a_1 + 2d) &= 3, \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 4d) &= -3.\end{aligned}$$

Zbrojimo li ove dvije jednačbe, nakon sređivanja, dobivamo homogenu kvadratnu jednačbu $2a_1^2 + 9a_1d + 10d^2 = 0$. Dijeljenjem s d^2 dobivamo kvadratnu jednačbu

$$2\left(\frac{a_1}{d}\right)^2 + 9 \cdot \frac{a_1}{d} + 10 = 0.$$

Njezina rješenja su $\frac{a_1}{d} = -2$, $\frac{a_1}{d} = -\frac{5}{2}$. Dobivamo $a_1 = -2d$, $a_1 = -\frac{5}{2}d$.

Prvo rješenje $a_1 = -2d$ nema smisla jer uvrštavanjem u prvu jednačbu dobivamo $-d \cdot 0 = 3!$

Za $a_1 = -\frac{5}{2}d$ iz prve jednačbe dobivamo $d = \pm 2$. No, $d = -2$ ne zadovoljava jer niz mora biti rastući. Za $d = 2$ dobivamo $a_1 = -5$.

Zbroj prvih n članova niza je

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = n^2 - 6n = (n-3)^2 - 9.$$

Minimum za S_n dobiva se za $n = 3$ i on iznosi $S_{\min} = -9$.

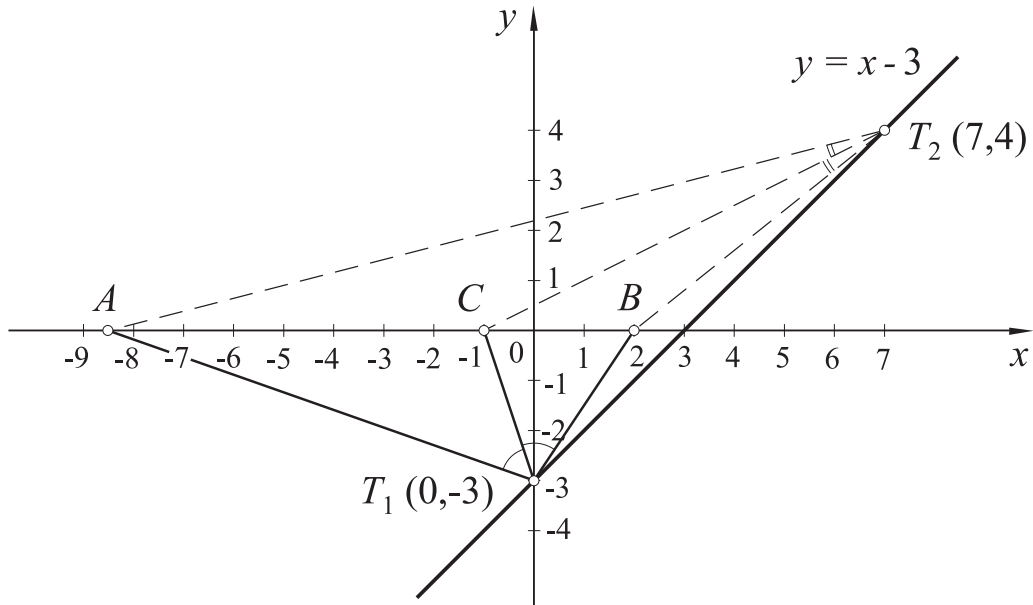
Napomena. Podijelimo li drugu jednačbu s prvom, dobivamo $\frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = -1$, odakle se dobiva $a_1 = -\frac{5}{2}d$, i dalje nastavlja kao gore.

Zadatak B-4.2. (20 bodova) U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2}, 0\right)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 0)$. Nađi sve točke pravca $y = x - 3$ iz koje se dužine \overline{AC} i \overline{BC} vide pod istim kutom različitim od nule.

Prvo rješenje. Neka je T tražena točka. Njene koordinate su $T(x, x-3)$. Budući da su kutovi $\sphericalangle CTA$ i $\sphericalangle BTC$ jednaki, dužina \overline{TC} leži na simetrali kuta $\sphericalangle BTA$. Iz teorema o

simetrali kuta imamo omjer $|AT| : |BT| = |AC| : |BC|$. Uvrstimo li koordinate točkaca imamo

$$\sqrt{\left(x + \frac{17}{2}\right)^2 + (x - 3)^2} : \sqrt{(x - 2)^2 + (x - 3)^2} = \frac{15}{2} : 3.$$



Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo jednadžbu $x^2 - 7x = 0$, čija su rješenja $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Odgovarajuće ordinate su $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

Dakle, tražene točke su $T_1(0, -3)$ i $T_2(7, 4)$.

Drugo rješenje. Neka je T tražena točka. Njezine koordinate su $T(x, y) = T(x, x - 3)$.

Koeficijent smjera pravca T_1T_2 , čije su koordinate $T(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$, je $k_{T_1T_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

U našem slučaju imamo:

$$k_{AT} = \frac{x - 3}{x + \frac{17}{2}} = \frac{2(x - 3)}{2x + 17}, \quad k_{BT} = \frac{x - 3}{x - 2}, \quad k_{CT} = \frac{x - 3}{x + 1}.$$

Za kut α između pravaca s koeficijentima smjerova k_1 , k_2 vrijedi $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$, a kako je $\sphericalangle CTA = \sphericalangle BTC$ dobivamo

$$\frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT} \cdot k_{AT}} = \frac{k_{BT} - k_{CT}}{1 + k_{BT} \cdot k_{CT}}.$$

Uvrstimo li vrijednosti za k_{AT} , k_{BT} , k_{CT} dobivamo

$$\frac{\frac{x - 3}{x + 1} - \frac{2(x - 3)}{2x + 17}}{1 + \frac{x - 3}{x + 1} \cdot \frac{2(x - 3)}{2x + 17}} = \frac{\frac{x - 3}{x - 2} - \frac{x - 3}{x + 1}}{1 + \frac{x - 3}{x - 2} \cdot \frac{x - 3}{x + 1}}.$$

Sređivanjem dvojnih razlomaka dobit ćemo $\frac{5(x-3)}{4x^2+7x+35} = \frac{x-3}{2x^2-7x+7}$.

Jedno rješenje ove jednadžbe je $x = 3$, a pripadna ordinata je $y = 0$. U ovom slučaju se dužine \overline{AC} i \overline{BC} vide pod kutom jednakim nuli, što ne odgovara uvjetu zadatka. Zato možemo dijeliti s $x - 3$ i dobivamo $\frac{5}{4x^2+7x+35} = \frac{1}{2x^2-7x+7}$.

Nakon sređivanja dobivamo $x(x-7) = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 0$, $x_2 = 7$, a odgovarajuće ordinate su $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

Dakle tražene točke su $T_1(0, -3)$, $T_2(7, 4)$.

Zadatak B-4.3. (20 bodova) Koliki su minimum i maksimum funkcije

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}?$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

Rješenje. Uočimo da je nazivnik jednak $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ pa je y definiran za svaki realan broj x . Dobivamo

$$(y-1)\sin^2 x + (y+1)\sin x + y-1 = 0. \quad (1)$$

Da bi ova kvadratna jednadžba, po $\sin x$, imala realna rješenja, njezina diskriminanta mora biti nenegativna tj.

$$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad (3-y)(3y-1) \geq 0.$$

Odavde dobivamo $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$, odnosno $y_{\min} = \frac{1}{3}$, $y_{\max} = 3$.

Uvrstimo li $y = \frac{1}{3}$ u (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu $(\sin x - 1)^2 = 0$ tj. $\sin x = 1$, odnosno minimum na $x \in [0, 2\pi]$ se postiže za $x = \frac{\pi}{2}$. Analogno za $y = 3$ dobivamo $(\sin x + 1)^2 = 0$, čije je jedino rješenje $\sin x = -1$ pa se maksimum dostiže za $x = \frac{3\pi}{2}$.

Zadatak B-4.4. (20 bodova) Nađi formulu za zbroj

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \dots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

Rješenje. Preuredimo najprije n -ti član:

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} &= \frac{n+2}{n![1 + (n+1) + (n+1)(n+2)]} \\ &= \frac{n+2}{n!(n^2 + 4n + 4)} = \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2) - 1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

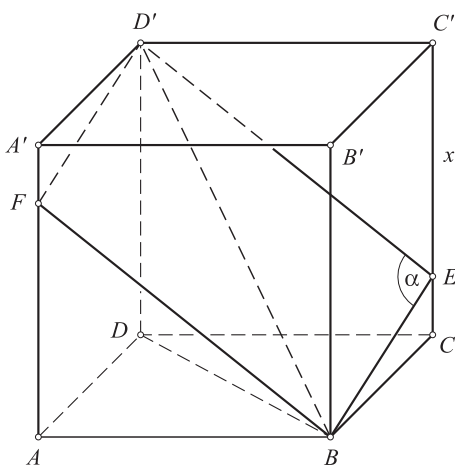
Sada imamo

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Limes niza S_n je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \right) = \frac{1}{2}$.

Zadatak B-4.5. (20 bodova) Kocka $ABCD A' B' C' D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?

Rješenje. Označimo s a duljinu brida kocke. Presjek kocke i ravnine je paralelogram $BED'F$ čija jedna dijagonala je prostorna dijagonala $\overline{BD'}$ kocke. Površina paralelograma je $P = |D'E| \cdot |BE| \cdot \sin \alpha$, gdje je $\alpha = \sphericalangle D'EB$.



Neka je $x = |C'E|$. Tada je $|D'E| = \sqrt{a^2 + x^2}$, $|BE| = \sqrt{a^2 + (a-x)^2}$.

Korištenjem kosinusovog poučka za trokut $D'BE$ imamo

$$|BD'|^2 = |D'E|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |D'E| \cdot |BE| \cos \alpha.$$

Uvrštavanjem $|BD'| = a\sqrt{3}$ te izraza za $|D'E|$, $|BE|$, nakon sređivanja, imamo

$$\cos \alpha = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + (a - x)^2)}}.$$

Iz $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ dobivamo

$$\sin \alpha = \frac{a\sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + (a - x)^2)}}.$$

Uvrštavanjem u formulu za površinu paralelograma dobivamo $P = a\sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}$.

Budući da je pod korijenom kvadratna funkcija, ona poprima minimum za $x = \frac{-(-2a)}{2 \cdot 2} = \frac{a}{2}$

i on iznosi $P_{\min} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Traženi kut je $\sphericalangle DBD'$. Duljine stranica pravokutnog trokuta DBD' su $|DD'| = a$, $|BD| = a\sqrt{2}$ i $|BD'| = a\sqrt{3}$ pa je

$$\cos \varphi = \frac{|BD|}{|BD'|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Napomena. Može se izračunati $\cos \varphi$ i pomoću formule

$$\cos \varphi = \frac{P_{ABCD}}{P_{\min}} = \frac{a^2}{\frac{a^2\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$