ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-1.1. (20 bodova) Odredi nepoznate znamenke $a,\ b,\ c,\ d$ tako da vrijedi $\overline{a3bc}\cdot 45=\overline{37d15b}$.

Rješenje. Broj na desnoj strani mora biti djeljiv s 5. Zato mora biti $b=5$ ili $b=0$.

(4 boda)

Za $b=5$ je

$$\overline{a35c}\cdot 45=\overline{37d155}.$$

Broj na desnoj strani mora biti djeljiv s 9 pa dobivamo $3+7+d+1+5+5=9k$ tj. $21+d=9k$, odakle je $d=6$, pa je

$$\overline{a35c}\cdot 45=376155$$

odakle je $\overline{a35c}=376155:45=8359$. Stoga je $a=8$ i $c=9$.

(8 bodova)

Za $b=0$ imamo

$$\overline{a30c}\cdot 45=\overline{37d150}.$$

Broj na desnoj strani mora biti djeljiv s 9 pa dobivamo $3+7+d+1+5+0=9k$ tj. $16+d=9k$, odakle je $d=2$, pa je

$$\overline{a30c}\cdot 45=372150$$

odakle je $\overline{a30c}=372150:45=8270$, što ne zadovoljava.

Dakle, postoji samo jedno rješenje $(a,b,c,d)=(8,5,9,6)$

(8 bodova)

Zadatak B-1.2. (20 bodova)

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$|x+3|+2\sqrt{x^2+2x+1}=7.$$

Rješenje. Najprije uočimo $x^2+2x+1=(x+1)^2$, pa je $\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$. Jednadžba postaje $|x+3|+2|x+1|=7$.

(3 boda)

Treba promatrati tri slučaja:

$1^\circ\ x \in \langle -\infty, -3\rangle$; $\quad 2^\circ\ x \in [-3, -1\rangle$; $\quad 3^\circ\ x \in [-1, \infty\rangle$

(2 boda)

$1^\circ\ x \in \langle -\infty, -3\rangle$

$$\begin{aligned} -x-3-2x-2 &= 7 \\ x &= -4 \in \langle -\infty, -3\rangle \end{aligned}$$

(5 bodova)

$2^\circ\ x \in [-3, -1\rangle$

$$\begin{aligned} x+3-2x-2 &= 7 \\ x &= -6 \notin [-3, -1\rangle \end{aligned}$$

(5 bodova)

$3^\circ\ x \in [-1, \infty\rangle$

$$\begin{aligned} x+3+2x+2 &= 7 \\ x &= \frac{2}{3} \in [-1, \infty\rangle \end{aligned}$$

(5 bodova)

Jednadžba ima dva rješenja: $x = -4$, $x = \frac{2}{3}$.

Napomena. Ako učenik napiše $\sqrt{|x^2+2x+1|} = x+1$ dobit će treći slučaj, i ako nađe točan x dobiva 5 bodova.

Zadatak B-1.3. (20 bodova)

Duljine kateta pravokutnog trokuta su 8 cm i 6 cm. Unutar trokuta dana je točka T koja je od kraće katete udaljena za 1 cm, a od dulje 2 cm. Koliko je točka T udaljena od hipotenuze? Kolika je duljina visine na hipotenuzu?

Rješenje. Spojimo li točku T s vrhovima A, B, C dobivamo trokute ABT, BCT, CAT.

Tražena udaljenost x je duljina visine $\overline{TD}$ trokuta ABT. Neka je $a = |BC| = 8$ cm, $b = |CA| = 6$ cm. Visine trokuta BCT i CAT su redom 2 cm i 1 cm.

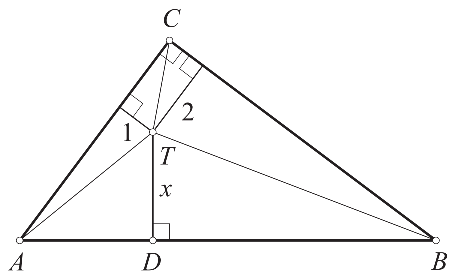
Duljina hipotenuze je $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+6^2}$ cm $= \sqrt{100}$ cm $= 10$ cm. (1 bod)

Površinu trokuta ćemo izraziti na dva načina:

$$\frac{|BC| \cdot |CA|}{2} = P_{ABC} = P_{ABT} + P_{BCT} + P_{CAT}$$

(10 bodova)

Uvrstimo li poznate veličine dobivamo,



$$\frac{8 \cdot 6}{2}=\frac{10 \cdot x}{2}+\frac{8 \cdot 2}{2}+\frac{6 \cdot 1}{2}$$

iz čega imamo $x=\dfrac{26}{10}$ cm $=\dfrac{13}{5}$ cm $=2.6$ cm. (5 bodova)

Visinu na hipotenuzu ćemo također izračunati pomoću površina, tj. $\dfrac{ab}{2}=\dfrac{cv_c}{2}$, odakle dobivamo $8 \cdot 6=10 \cdot v_c$, tj. $v_c=\dfrac{48}{10}$ cm $=\dfrac{24}{5}$ cm $=4.8$ cm. (4 boda)

Zadatak B-1.4. (20 bodova)

Ako je $a+b=1$, dokaži jednakost $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

Rješenje. Rastavimo li nazivnike lijeve strane (razlika kubova!) dobivamo

$$\frac{a}{(b-1)(b^2+b+1)}-\frac{b}{(a-1)(a^2+a+1)} \qquad (1)$$

(3 boda)

Iz $a+b=1$ imamo $b-1=-a$, $a-1=-b$, (2 boda)

pa izraz (1) postaje

$$\frac{-1}{b^2+b+1}+\frac{1}{a^2+a+1}=\frac{b^2-a^2+b-a}{a^2b^2+ab^2+a^2b+a^2+ab+b^2+a+b+1}$$

(7 bodova)

Sada dobivamo, uz $a+b=1$,

$$\begin{aligned}\frac{(b-a)(b+a)+b-a}{a^2b^2+ab(a+b)+a^2+ab+b^2+a+b+1} &= \frac{2(b-a)}{a^2b^2+a^2+2ab+b^2+1+1}\\ &= \frac{2(b-a)}{a^2b^2+(a+b)^2+2}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.\end{aligned}$$

(8 bodova)

Zadatak B-1.5. (20 bodova)

Razlika dva neparna broja djeljiva je s 5. Kojom znamenkom završava razlika kubova tih brojeva?

Rješenje. Označimo te brojeve s $a = 2m - 1$, $b = 2n - 1$. Njihova razlika je

$$a - b = 2(m - n).$$

(5 bodova)

Kako je razlika djeljiva s 5 i s 2, ona je djeljiva s 10, tj. $a - b = 10k$. (5 bodova)

Rastavom na faktore razlike kubova $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ dobivamo $a^3 - b^3 = 10k(a^2 + ab + b^2)$, pa je $a^3 - b^3$ djeljivo s 10, odnosno razlika kubova završava s 0.

(10 bodova)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-2.1. (20 bodova) Odredi sve kompleksne brojeve z takve da su moduli brojeva z, $\frac{1}{z}$, $1-z$ jednaki.

Rješenje. Prema uvjetu zadatka je $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$

Iz jednakosti $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ dobivamo $|z| = 1$, a zatim iz $|z| = |1-z|$ slijedi $|1-z| = 1$.

Označimo li $z = x + iy$ imamo $x^2 + y^2 = 1$ i $(1-x)^2 + y^2 = 1$. (5 bodova)

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobiva se $x = \frac{1}{2}$.

Nadalje, $y^2 = 1 - x^2 = \frac{3}{4}$, odakle je $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. (10 bodova)

Traženi kompleksni brojevi su $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(5 bodova)

Zadatak B-2.2. (20 bodova) U skupu kompleksnih brojeva odredi sva rješenja jednadžbe

$$x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0.$$

Rješenje. Kako 0 nije rješenje, dijeljenjem jednadžbe s x^4 dobivamo

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 - 10 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} &= 0, \\ \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Supstitucijom $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$, dobivamo $t^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$, pa jednadžba postaje

$$t^2 + 4t - 12 = 0,$$

čija rješenja su $t_1 = -6$ i $t_2 = 2$. (8 bodova)

Za $t_1 = -6$ imamo:

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{x^2} &= -6\\
u &= x+\frac{1}{x} \qquad \text{(supstitucija)}\\
u^2 &= x^2+2+\frac{1}{x^2}=-4\\
u_{1,2} &= \pm 2i\\
x+\frac{1}{x}=2i &\qquad x+\frac{1}{x}=-2i\\
x^2-2ix+1=0 &\qquad x^2+2ix+1=0\\
x_{1,2}=(1\pm\sqrt{2})i &\qquad x_{3,4}=-(1\pm\sqrt{2})i
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Za $t_2=2$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{x^2} &= 2\\
x^4-2x^2+1 &= 0\\
(x^2-1)^2 &= 0\\
x_{5,6}=1 &\qquad x_{7,8}=-1.
\end{aligned}$$

(4 boda)

Rješenja jednadžbe su $x\in\{\pm 1,\ \pm(1\pm\sqrt{2})i\}$. (2 boda)

Zadatak B-2.3. (20 bodova) Pojednostavni izraz

$$-x^{-x^{-x}}\left(\frac{x^{-x^{x}}+x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^{x}}}\right)$$

za $x>0$.

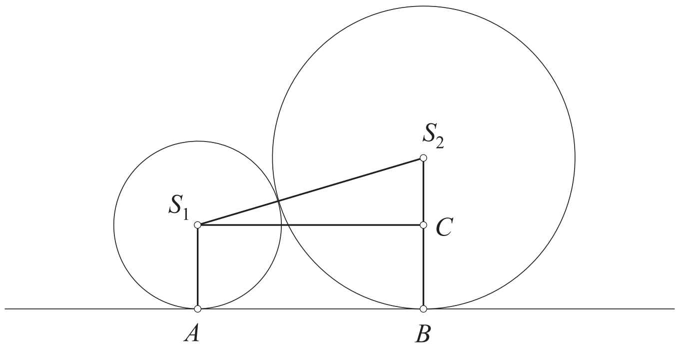
Rješenje. Supstitucijom $x^x=u$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
-x^{-x^{-x}}\left(\frac{x^{-x^{x}}+x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^{x}}}\right) &= -x^{-\frac{1}{u}}\cdot\frac{\dfrac{1}{x^u}+x^{\frac{1}{u}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{u}}}+x^u}\\
&= -x^{-\frac{1}{u}}\cdot\frac{\dfrac{1+x^u x^{\frac{1}{u}}}{x^u}}{\dfrac{1+x^u x^{\frac{1}{u}}}{x^{\frac{1}{u}}}}\\
&= -x^{-\frac{1}{u}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{u}}}{x^u}=-\frac{1}{x^u}=-x^{-u}=-x^{-x^{x}}
\end{aligned}$$

(20 bodova)

Zadatak B-2.4. (20 bodova) Dvije kružnice duljina promjera 6 cm i 18 cm diraju se izvana. Izračunaj površinu lika omeđenog kružnicama i njihovom zajedničkom vanjskom tangentom.

Rješenje. Kako je $|S_1S_2| = 12$, $|CS_2| = 6$ i trokut S_1CS_2 je pravokutan, on je jednak polovini jednakostraničnog pa je $\sphericalangle S_1S_2C = 60°$. (4 boda)



Od površine P_1 trapeza ABS_2S_1 treba oduzeti površinu P_2 kružnog isječka na malom krugu sa središnjim kutom od $120°$ i površinu kružnog isječka P_3 na velikom krugu sa središnjim kutom od $60°$.

Stoga imamo

$$P_1 = \frac{|AS_1| + |BS_2|}{2} \cdot |S_1C| = \frac{3+9}{2} \cdot \sqrt{12^2 - 6^2}\ \text{cm}^2 = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2,$$

(4 boda)

$$P_2 = \frac{3^2\pi \cdot 120°}{360°}\ \text{cm}^2 = 3\pi\ \text{cm}^2,$$

(4 boda)

$$P_3 = \frac{9^2\pi \cdot 60°}{360°}\ \text{cm}^2 = \frac{27\pi}{2}\ \text{cm}^2.$$

(4 boda)

Odavde dobivamo

$$P = P_1 - P_2 - P_3 = \left(36\sqrt{3} - \frac{33\pi}{2}\right)\ \text{cm}^2$$

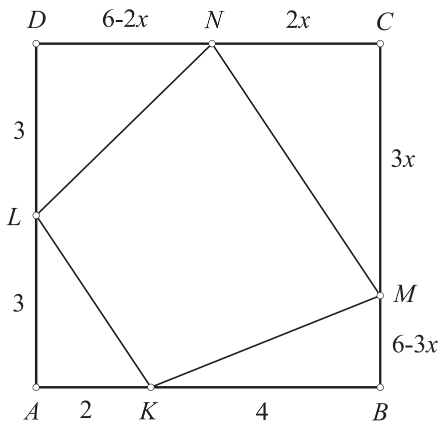
(4 boda)

Zadatak B-2.5. (20 bodova) Duljina stranice kvadrata je 6 cm. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ zadane su točke K i L takve da je $|AK| = 2$ cm i $|AL| = 3$ cm. Kvadratu je upisan trapez s osnovicom $\overline{KL}$. Kolika je najveća moguća površina upisanog trapeza?

Rješenje. Označimo vrhove osnovice trapeza s M i N. Trokuti AKL i CNM su slični ($\sphericalangle AKL = \sphericalangle CNM$).

Označimo li duljine stranica $\overline{CN}$ i $\overline{CM}$ s $2x$ i $3x$, površinu P trapeza možemo prikazati kao razliku površine kvadrata $ABCD$ i četiri trokuta AKL, BMK, CNM, DLN.

(4 boda)



$$\begin{aligned} P &= 36-\frac{3\cdot 2}{2}-\frac{4\cdot(6-3x)}{2}-\frac{3x\cdot 2x}{2}-\frac{3\cdot(6-2x)}{2} \\ &= -3x^2+9x+12. \end{aligned}$$

(8 bodova)

Kvadratna funkcija $f(x)=-3x^2+9x+12$ poprima maksimum za $x=\dfrac{-9}{2\cdot(-3)}=\dfrac{3}{2}$.

(6 bodova)

Dakle, $P_{\max}=-3\cdot\dfrac{9}{4}+9\cdot\dfrac{3}{2}+12=\dfrac{75}{4}$. (2 boda)

(Ili iz $f(x)=-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{75}{4}$ slijedi $P_{\max}=\dfrac{75}{4}$.)

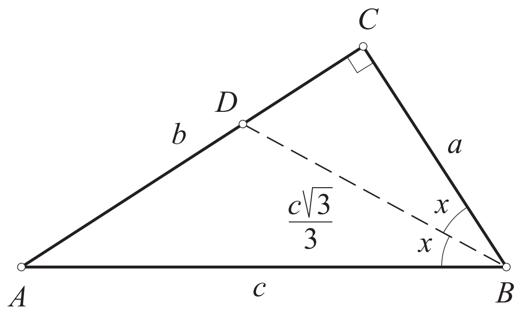
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-3.1. (20 bodova) Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je c, a duljina simetrale jednog od šiljastih kutova je $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Kolike su duljine kateta?

Prvo rješenje. Iz slike imamo $a = c\cos 2x = \frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x$. (3 boda)



Iz dobivene jednakosti dobivamo jednadžbu $\sqrt{3}\cos 2x = \cos x$ ili nakon sređivanja $2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} = 0$. (6 bodova)

Njena rješenja su $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ovo drugo rješenje ne odgovara jer je $x < 90°$). (6 bodova)

Iz $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dobivamo duljine kateta $\frac{c}{2}$ i $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. (5 bodova)

Drugo rješenje. Površina trokuta ABC je jednaka zbroju površina trokuta BCD i BDA. Uz $a = c\cos 2x$ i $b = c\sin 2x$ dobivamo:

$$\frac{ab}{2} = \frac{a\cdot\frac{c\sqrt{3}}{3}}{2}\sin x + \frac{c\cdot\frac{c\sqrt{3}}{3}}{2}\sin x,$$

i nadalje

$$c^2\sin 2x\cos 2x = c^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x\cos 2x + c^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x.$$

(6 bodova)

Dijeljenjem s c^2, uz $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, dobivamo

$$\sin x(\cos 2x + 1 - 2\sqrt{3}\cos x\cos 2x) = 0.$$

Kako je $\sin x \neq 0$ imamo jednadžbu

$$\cos 2x + 1 - 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x = 0 \qquad \text{tj.} \qquad 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x = 0.$$

(6 bodova)

Budući je $\cos x \neq 0$ dobivamo jednadžbu iz prvog rješenja. (8 bodova)

Zadatak B-3.2. (20 bodova) Riješi nejednadžbu

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) < 1.$$

Rješenje. Da bi nejednadžba imala smisla mora biti zadovoljeno

$$x > 0, \quad x \neq 1 \quad \text{i} \quad x \neq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2(2x)} \cdot \log_2(16x) &< 1, \\ \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1+\log_2 x} \cdot (4 + \log_2 x) &< 1. \end{aligned}$$

(5 bodova)

Uz supstituciju

$$\log_2 x = t, \qquad (2)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{4+t}{t(1+t)} &< 1 \\ \frac{4-t^2}{t(1+t)} &< 0. \end{aligned}$$

(7 bodova)

Rješenje ove nejednadžbe je

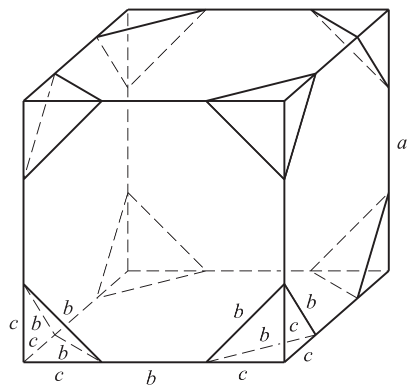
$$t \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle. \qquad (3)$$

(3 boda)

Iz (1), (2) i (3) dobivamo $x \in \left\langle 0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$.

(5 bodova)

Zadatak B-3.3. (20 bodova) Od kocke duljine brida 3 cm odsječeno je svih osam vrhova tako da novo tijelo ima sve bridove jednakih duljina. Koliki je volumen novonastalog tijela?



Rješenje. Iz jednadžbi $b+2c=a$ i $b=c\sqrt{2}$ dobivamo $c=\dfrac{3(2-\sqrt{2})}{2}$ cm. (4 boda)

Volumen svakog od osam tetraedara je

$$V_T=\frac{c^3}{6}=\frac{9(10-7\sqrt{2})}{8}\ \text{cm}^3.$$

(6 bodova)

Volumen kocke je $V_K=a^3=27\ \text{cm}^3$. (4 bodova)

Konačno, volumen tijela je

$$V=V_K-8\cdot V_T=63(\sqrt{2}-1)\ \text{cm}^3.$$

(6 bodova)

Zadatak B-3.4. (20 bodova) Izračunaj zbroj

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ.$$

Rješenje. Primjenjujući relaciju $\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$ dobivamo:

$$\sin^2 1^\circ=\cos^2 89^\circ,\ \sin^2 2^\circ=\cos^2 88^\circ,\ldots,\sin^2 44^\circ=\cos^2 46^\circ.$$

(6 bodova)

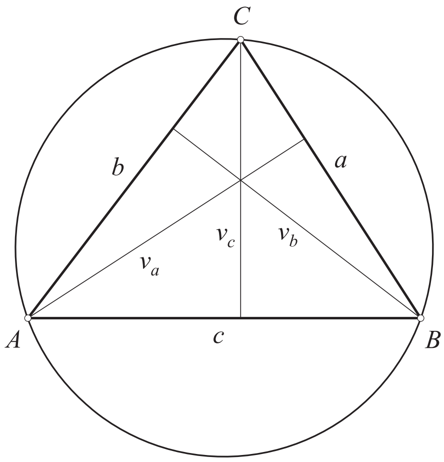
Odavde je

$$\begin{aligned}
&\sin^2 1^\circ+\ldots+\sin^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 46^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ\\
=\ &\cos^2 89^\circ+\ldots+\cos^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 46^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ\\
=\ &44\cdot 1+\frac{1}{2}+1=45.5.
\end{aligned}$$

(14 bodova)

Zadatak B-3.5. (20 bodova) Duljine visina trokuta ABC odnose se kao $v_a:v_b:v_c=6:2\sqrt{3}:3$, a opseg opisane mu kružnice iznosi 8π cm. Odredi duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC.

Rješenje. Iz $av_a = bv_b$ dobivamo $a : b = v_b : v_a = 2\sqrt{3} : 6 = 1 : \sqrt{3}$, a iz $b : c = v_c : v_b = 3 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3} : 2$ tj. $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$. Neka je $a = k$, $b = \sqrt{3}k$, $c = 2k$. (4 boda)



Sada je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3k^2 + 4k^2 - k^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

odakle je $\alpha = 30°$, (4 boda)

a iz

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{k^2 + 4k^2 - 3k^2}{2 \cdot 1 \cdot 2k^2} = \frac{1}{2},$$

slijedi $\beta = 60°$. (4 boda)

Odavde dobivamo $\gamma = 90°$, tj. trokut je pravokutan. Polumjer opisane kružnice je $r = \dfrac{c}{2}$, a kako je njezin opseg $8\pi = 2r\pi$ dobivamo $r = 4$ i $c = 8$. (4 boda)

Iz $8 = 2k$ dobivamo $k = 4$, odnosno $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$. (4 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-4.1. (20 bodova) Riješi sustav jednadžbi (u skupu prirodnih brojeva)

$$\begin{cases} \binom{x}{y} = \binom{x}{y+2}, \\ \binom{x}{2} = 153. \end{cases}$$

Rješenje. Iz $\binom{x}{2} = 153$ dobivamo $\frac{x(x-1)}{2} = 153$ tj. $x^2 - x - 306 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 18$, $x_2 = -17$. Kako tražimo samo rješenja u skupu prirodnih brojeva, moguće je jedino $x_1 = 18$. (10 bodova)

Prvi način. Sada iz prve jednadžbe imamo

$$\binom{18}{y} = \binom{18}{y+2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{18!}{(18-y)!y!} = \frac{18!}{(16-y)!(y+2)!},$$

odnosno

$$\begin{aligned} (18-y)(17-y) &= (y+1)(y+2) \\ 38y &= 304, \end{aligned}$$

tj. $y = 8$. (10 bodova)

Drugi način. Iz svojstva simetrije binomnih koeficijenata slijedi

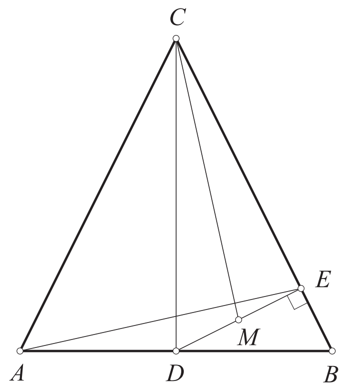
$$y + y + 2 = x$$

iz čega je $y = 8$.

Zadatak B-4.2. (20 bodova) U jednakokračnom trokutu ABC ($|AC| = |BC|$) točka D je polovište baze $\overline{AB}$, dužina $\overline{DE}$ je visina trokuta DBC, a M polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da su pravci AE i CM međusobno okomiti.

Rješenje. Iz slike imamo:
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}$.

Dovoljno je pokazati da je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CM}$ jednak nuli. (5 bodova)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CM} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}_{=0} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} + \underbrace{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DM}}_{=0} \\
&= \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{DM} \cdot (2\overrightarrow{DB}) = (\text{uz } 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD}}_{=0} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} \\
&= \overrightarrow{DE} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.
\end{aligned}
$$

(15 bodova)

Zadatak B-4.3. (20 bodova) Svaka stranica kvadrata, duljine a, podijeljena je u omjeru $1 : x$ $(x > 1)$. Dobivene točke su vrhovi novog kvadrata upisanog polaznom. Isti postupak se nastavlja sa svakim novim kvadratom. Koliki je zbroj površina polaznog i svih tako dobivenih kvadrata?

Rješenje. Površina polaznog kvadrata je $P_1 = a^2$;

Neka je $|AH| = |EB| = k$. Tada je $|AE| = |BF| = kx$. Budući je $|AE| + |EB| = a$ dobije se $kx + k = a$ tj. $k = \dfrac{a}{x+1}$. Stranicu $a_2 = |EH|$ nalazimo pomoću Pitagorinog poučka tj.

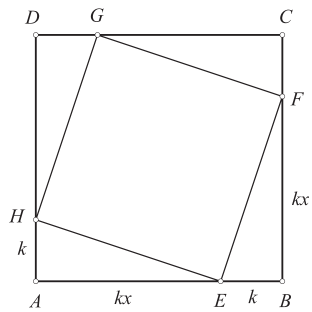
$$
a_2^2 = |AE|^2 + |AH|^2 = (kx)^2 + k^2 = k^2(x^2+1) = \frac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2}.
$$

Površina upisanog kvadrata je $P_2 = a_2^2 = \dfrac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2}$;

Površina novog upisanog kvadrata je $P_3 = a_3^2 = \dfrac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{(x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{a^2(x^2+1)^2}{(x+1)^4}$.

Postupak se analogno nastavlja. (8 bodova)

Zbroj površina svih kvadrata je



$$P = a^2 + \frac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2} + \frac{a^2(x^2+1)^2}{(x+1)^4} + \frac{a^2(x^2+1)^3}{(x+1)^6} + \dots$$

(4 boda)

Traženi zbroj površina je suma geometrijskog reda s kvocijentom $q = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x^2+2x+1} < 1$, radi čega red konvergira.

(3 boda)

Kako je prvi član jednak a^2, tražena površina je jednaka

$$P = \frac{a^2}{1-q} = \frac{a^2}{1 - \frac{x^2+1}{(x+1)^2}} = a^2 \cdot \frac{(x+1)^2}{2x}.$$

(5 bodova)

Zadatak B-4.4. (20 bodova) Veličine kutova $\alpha < \beta < \gamma$ trokuta uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a duljine njegovih stranica su a, b, c. Dokaži jednakost $(a+c)^2 = b^2 + 3ac$.

Rješenje. Kako su kutovi trokuta α, β, γ uzastopni članovi aritmetičkog niza, vrijedi $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. (5 bodova)

Suma kutova trokuta je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, iz čega slijedi $\beta + 2\beta = 180°$ tj. $\beta = 60°$.

(5 bodova)

Primijenimo sada poučak o kosinusu:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60° = a^2 + c^2 - ac \quad \text{tj.} \quad a^2 + c^2 = b^2 + ac.$$

(5 bodova)

Tada je $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 3ac$. (5 bodova)

Zadatak B-4.5. (20 bodova) Pravac kroz ishodište siječe pravce dane jednadžbama $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ u točkama A i B. Odredi geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{AB}$.

Rješenje. Jednadžba pravca koji prolazi ishodištem je $y = kx$.

Sjecište tog pravca s pravcem $x + y - 1 = 0$ dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$y = kx, \qquad y = -x + 1.$$

Sjecište je točka $A\left(\frac{1}{1+k}, \frac{k}{1+k}\right)$.

Sjecište s pravcem $x - y - 1 = 0$ dobivamo rješavanjem ovog sustava jednadžbi

$$y = kx, \qquad y = x - 1.$$

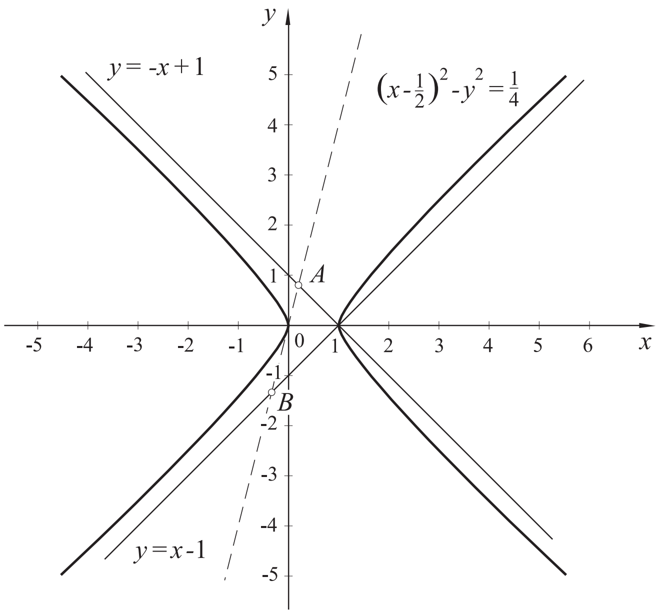
Drugo sjecište je $B\left(\frac{1}{1-k}, \frac{k}{1-k}\right)$. (5 bodova)

Polovište dužine $\overline{AB}$ je

$$P\left(\frac{\frac{1}{1+k}+\frac{1}{1-k}}{2}, \frac{\frac{k}{1+k}+\frac{k}{1-k}}{2}\right) = P\left(\frac{1}{1-k^2}, \frac{k}{1-k^2}\right).$$

(3 boda)

Koordinate točke P su $x = \frac{1}{1-k^2}$, $y = \frac{k}{1-k^2}$.



Promatrajmo sada razliku $x^2 - y^2$:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \frac{1-k}{1-k^2} \cdot \frac{1+k}{1-k^2} = \frac{1}{1-k^2} = x.$$

Dobili smo jednadžbu $x^2 - x - y^2 = 0$ (5 bodova)

koju možemo preurediti u $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$. (3 boda)

Traženo geometrijsko mjesto točaka je hiperbola dana ovom jednadžbom. (4 boda)