

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

1. Rastavite na faktore izraz
(4) $a^5 + b^5 - ab(a^3 + b^3)$.
2. Izračunajte:
(4)
$$\sqrt{\frac{145.5^2 - 96.5^2}{193.5^2 - 31.5^2}}$$
3. Jedan krak trapeza duljine je 16 cm i zatvara s osnovicom kut od 30° . Drugi krak
(4) s osnovicom zatvara kut od 45° . Izračunajte površinu trapeza ako manja osnovica ima duljinu 2 cm.
4. Stočar je za svoje 24 krave osigurao hranu za 18 tjedana. Koliko krava bi morao
(4) prodati nakon 8 tjedana da bi imao hrane za još 12 tjedana?
5. Dokažite da je zbroj bilo koje tri potencije broja 2, kojima su eksponenti uzastopni
(4) neparni brojevi, djeljiv s 21.
6. Ako je $\frac{z}{x+y} = 2$ i $\frac{y}{x+z} = 3$, kolika je vrijednost od $\frac{z}{y+z}$?
(10)
7. Riješite jednadžbu:
(10)
$$\frac{2x+1}{6x^2-3x} - \frac{2x-1}{14x^2+7x} = \frac{8}{12x^2-3}$$
8. Ako se od težišnica pravokutnog trokuta može napraviti pravokutni trokut, dokažite
(10) da je duljina bar jedne katete danog trokuta iracionalan broj.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

1. Odredite modul kompleksnog broja $z = \frac{(2 + 3i)^{2011}}{(2 - 3i)^{2009}}$.
(4)
2. Riješite jednadžbu u skupu \mathbb{C} :
(4)
$$x^6 + x^3 = 18(12 - x^3).$$
3. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu $x^2 + 2x + 2 = 0$, izračunajte vrijednost izraza
(4) $\frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 - x_2)^2}$, gdje su x_1, x_2 rješenja dane jednadžbe.
4. Gliser je morao svratiti u mjesto pored kojeg je prolazio da u pristaništu natoči
(4) gorivo. Pri tom se zadržao 12 minuta. To zakašnjenje je nadoknadio na preostalom dijelu puta od 60 km povećanjem brzine za 10 km / h. Kolika je bila brzina glisera prije pristajanja u luci?
5. Odredite vrijednosti realnog parametra a tako da je nejednakost
(4)
$$(a + 1)x^2 - 3(a + 1)x + a < 0$$
točna za svaki $x \in \mathbb{R}$.
6. Napišite neku kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima čije je jedno rješenje
(10) $\left(\frac{\sqrt{2}}{1 - i}\right)^{2011}$.
7. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutem u vrhu C . Povučena je visina CN
(10) na stranicu AB i iz točke N povučemo visinu NP na stranicu BC u trokutu BCN . Ako su duljine kateta $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$, kolika je duljina visine NP ?
8. Oko bazena u obliku pravilnog šesterokuta napravljena je staza širine 2 m i površine
(10) 36 m^2 . Koliki je opseg bazena?

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

1. Riješite sustav jednadžbi:

(4)

$$2^x \cdot 3^y = 24$$

$$2^y \cdot 3^x = 54.$$

2. Osni presjek uspravnog valjka je kvadrat. Odredite duljinu polumjera osnovke tako da njegovo oplošje i obujam imaju istu brojčanu vrijednost.

(4)

3. Riješite jednadžbu:

(4)

$$\cos 2012x - \cos 2010x = 0.$$

4. Ako je $\operatorname{tg} x = 4 + \operatorname{ctg} x$, izračunajte

(4)

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x}.$$

5. U pravokutnom trokutu je omjer sinusa šiljastih kutova $\sqrt{3} : 1$. Odredite kutove trokuta.

(4)

6. Osnovka trostrane piramide je pravokutan trokut s katetama duljine 12 cm i 35 cm. Sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60° . Odredite oplošje i obujam piramide.

(10)

7. Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ za koje je izraz

(10)

$$x^{2 - \log_a^2 x - \log_a(x^2)} - \frac{1}{x}$$

pozitivan.

8. Za kutove α i β trokuta ABC vrijedi:

(10)

$$3 \sin \alpha + 4 \cos \beta = 6$$

$$4 \sin \beta + 3 \cos \alpha = 1.$$

Odredite mjeru kuta γ tog trokuta.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

1. Odredite prirodan broj $n \geq 2$ tako da vrijedi jednakost
(4)

$$\frac{(n-1)^2 n(n+1)!}{(n+2)!} = \binom{n}{2}.$$

2. Koliko je $49 \cdot 35$ ako je $49 + 35 = 82$?
(4)

3. Odredite kompleksan broj z^3 , ako je imaginarni dio broja z jednak $-\frac{1}{3}$ i ako je argument broja z jednak $\frac{7\pi}{6}$.
(4)

4. Nakladnik je odlučio rasprodati zalihe knjiga koje već dulje vrijeme čuva u skladištu.
(4) Slaže ih u pakete i određuje reklamne cijene paketa. Svaka knjiga ima istu novčanu vrijednost. Kad bi pakirao po 4, 5 ili 6 knjiga, svaki put ostale bi mu dvije knjige, a ako ih pakira po 7, sve će knjige iskoristiti. Koliko je najmanje knjiga u skladištu.

5. U pravilnom n -terokutu je polumjer opisane kružnice 2, S je njeno središte, A, B
(4) su uzastopni vrhovi n -terokuta. Odredite n i unutrašnji kut pravilnog n -terokuta ako je skalarni umnožak $\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 2\sqrt{2}$.

6. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi
(10)

$$2 + 16 + 56 + \dots + (3n-2) \cdot 2^n = 10 + (3n-5) \cdot 2^{n+1}.$$

7. Deltoid rotira oko pravca koji prolazi jednim njegovim vrhom, a paralelan je s osi
(10) simetrije deltoida. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom ako su duljine stranica deltoida $a = 2$ cm, $b = 8$ cm, a kut među njima $\alpha = 120^\circ$.

8. Oko žarišta parabole $y^2 = 16x$ opisana je kružnica koja dira ravnalicu parabole.
(10) Pod kojim se kutem sijeku ove dvije krivulje?