ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Ako za kutove α, β, γ nekog trokuta vrijedi $\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1$, dokaži da je taj trokut jednakokračan.

Rješenje.

U trokutu vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, odnosno $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$,

pa je $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. (2 boda)

Zbog toga iz dane jednakosti $\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1$ redom slijedi

$$\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta = 1$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = 1 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1$$

$$\cos(\alpha-\beta) = 1. \qquad \text{(2 boda)}$$

Posljednja jednakost vrijedi ako i samo ako je
$\alpha - \beta = 180° \cdot k$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$. (2 boda)

Budući da su α i β kutovi trokuta, mora biti $k = 0$, (1 bod)

odnosno $\alpha = \beta$. (1 bod)

Time smo dokazali da je trokut jednakokračan.

Zadatak A-3.2.

Vladimir je na ploču napisao brojeve 1 i 2, a zatim nastavio pisati brojeve tako da je svaki novi broj suma kvadrata zadnjih dvaju napisanih brojeva. Dokaži da, ponavljajući taj postupak, Vladimir nikad neće napisati broj djeljiv s 3 niti broj djeljiv sa 7.

Prvo rješenje.

Primijetimo da Vladimir redom ispisuje članove niza zadanog rekurzijom:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2 \quad \text{za } k \geqslant 3.$$

Prvih nekoliko članova je $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ a_4 = 29, \ldots$

Promotrimo li ostatke koje ti brojevi daju pri dijeljenju s 3,
uočavamo da svi, osim broja a_1, daju ostatak 2. (1 bod)

Matematičkom indukcijom se lako pokaže da to vrijedi za sve članove a_k za $k \geqslant 2$:

$$a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-2}^2 \equiv 2^2 + 2^2 = 8 \equiv 2 \pmod{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Stoga nijedan član promatranog niza nije djeljiv s 3. (1 bod)

Promotrimo sada ostatke pri dijeljenju sa 7.

$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv 1 \pmod{7} \\
a_2 &\equiv 2 \pmod{7} \\
a_3 &\equiv 1^2 + 2^2 \equiv 5 \pmod{7} \\
a_4 &\equiv 2^2 + 5^2 = 29 \equiv 1 \pmod{7} \\
a_5 &\equiv 5^2 + 1^2 = 26 \equiv 5 \pmod{7} \\
a_6 &\equiv 1^2 + 5^2 = 26 \equiv 5 \pmod{7} \\
a_7 &\equiv 5^2 + 5^2 = 50 \equiv 1 \pmod{7} \\
a_8 &\equiv 5^2 + 1^2 = 26 \equiv 5 \pmod{7}
\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Uočavamo da se nakon prva dva člana ponavljaju ostaci 1 i 5, (1 bod)

točnije

$$\begin{aligned}
a_{3l} &\equiv 5 \pmod{7} \\
a_{3l+1} &\equiv 1 \pmod{7} \\
a_{3l+2} &\equiv 5 \pmod{7}, \qquad \text{za } l \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

što nije teško provjeriti matematičkom indukcijom. (3 boda)

Stoga nijedan član promatranog niza nije djeljiv sa 7. (1 bod)

Drugo rješenje.

Na ploči su na početku brojevi 1 i 2 koji nisu djeljivi s 3.

Da bismo u nekom trenutku dobili broj djeljiv s 3, trebala bi suma kvadrata dva broja koja nisu djeljiva s 3 biti djeljiva s 3, (1 bod)

a to je moguće samo ako jedan od njih pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, a drugi ostatak 2. (1 bod)

Uočimo da kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv s 3 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. (Kvadrat prirodnog broja ne može dati ostatak 2 pri dijeljenju s 3.) (1 bod)

Stoga suma kvadrata dvaju prirodnih brojeva koji nisu djeljivi s 3 daje pri dijeljenju s 3 ostatak 2, dakle nije djeljiva s 3. (1 bod)

Slično možemo zaključivati i pri promatranju djeljivosti sa 7.

Kako je

$$0^2 = 0 \qquad 1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9 = 7 + 2$$

$$4^2 = 16 = 2 \cdot 7 + 2 \qquad 5^2 = 25 = 3 \cdot 7 + 4 \qquad 6^2 = 36 = 5 \cdot 7 + 1$$

jedini mogući ostaci pri dijeljenju potpunog kvadrata brojem 7 su 0, 1, 2 i 4. (2 boda)

Dakle, suma dva kvadrata je djeljiva sa 7 samo ako su oba djeljiva sa 7. (2 boda)

Kako početni brojevi nisu djeljivi sa 7, nikad nećemo dobiti broj djeljiv sa 7. (2 boda)

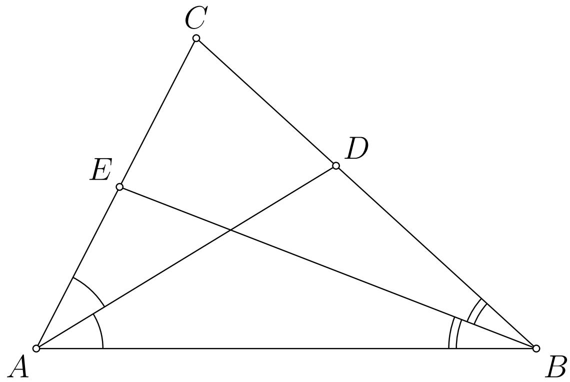
Napomena. Tvrdnja vrijedi i ako se zbrajaju kvadrati bilo kojih dvaju brojeva na ploči. Dokaz je isti, pa i takvo rješenje treba priznati.

Zadatak A-3.3.

Dan je trokut ABC. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Ako je $\sphericalangle ACB \geqslant 60^\circ$, dokaži da je $|AE| + |BD| \leqslant |AB|$.

Prvo rješenje.

Koristimo uobičajene oznake za duljine stranica i kutove trokuta.



Kako simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica imamo da je

$$|AE| = \frac{bc}{a+c} \quad \text{i} \quad |BD| = \frac{ac}{b+c}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zbog toga je

$$|AE| + |BD| = \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{b+c} = \frac{(a^2+b^2+ac+bc)\,c}{(a+c)\,(b+c)}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Nejednakost koju želimo dokazati ekvivalentna je s

$$\frac{(a^2+b^2+ac+bc)\,c}{(a+c)\,(b+c)} \leqslant c$$

odnosno redom

$$a^2+b^2+ac+bc \leqslant (a+c)\,(b+c)\,, \qquad \text{(1 bod)}$$
$$a^2+b^2+ac+bc \leqslant ab+ac+bc+c^2,$$
$$a^2+b^2-ab+c^2 \leqslant 0. \qquad (*) \qquad \text{(2 boda)}$$

S druge strane, kako je $\gamma \geqslant 60^\circ$, vrijedi $\cos\gamma \leqslant \cos 60^\circ$. (1 bod)

Iskoristimo li poučak o kosinusu, ta nejednakost poprima oblik

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \text{(1 bod)}$$

odakle je $a^2+b^2 \leqslant ab+c^2$, (1 bod)

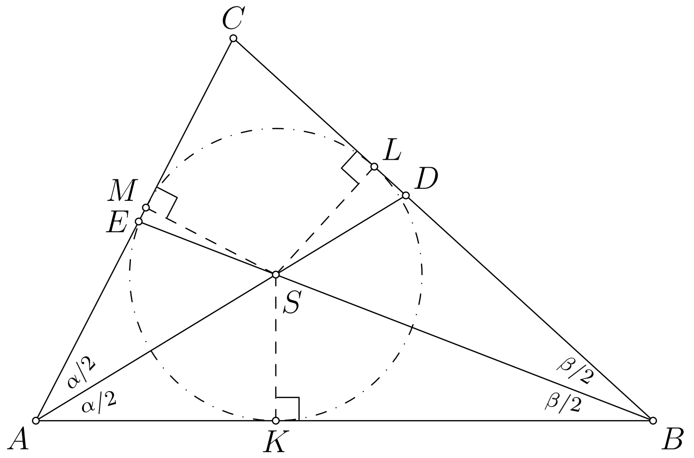
a to je ekvivalento s $(*)$. Time je tvrdnja dokazana. (1 bod)

Drugo rješenje.

Označimo $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Neka je S sjecište pravaca AD i BE (tj. središte trokutu upisane kružnice), a K, L, M ortogonalne projekcije točke S redom na dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

Očito je $|SK| = |SL| = |SM| = r$, gdje je r polumjer trokutu ABC upisane kružnice.



Trokuti $\triangle AKS$ i $\triangle AMS$ su sukladni

jer je $\sphericalangle KAS = \sphericalangle MAS$, $\sphericalangle AKS = \sphericalangle AMS = 90°$, a stranica $\overline{AS}$ je zajednička

pa slijedi $|AK| = |AM|$. (1 bod)

Analogno vrijedi $\triangle BKS \cong \triangle BLS$ pa je $|BK| = |BL|$. (1 bod)

Kako je $|AB| = |AK| + |BK| = |AM| + |BL|$

nejednakost $|AE| + |BD| \leqslant |AB|$ je ekvivalentna s $|AE| + |BD| \leqslant |AM| + |BL|$,

odnosno $(|AM| - |AE|) + (|BL| - |BD|) \geqslant 0$. (1 bod)

Kako je $\sphericalangle CEB = \alpha + \frac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle CDA = \beta + \frac{\alpha}{2}$, iz trokuta ESM i DSL imamo

$|AM| - |AE| = r \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\beta}{2})$, odnosno $|BL| - |BD| = r \cdot \operatorname{ctg}(\beta + \frac{\alpha}{2})$ (2 boda)

pa nejednakost prelazi redom u ekvivalentne nejednakosti:

$$r \cdot \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + r \cdot \operatorname{ctg}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} \geqslant 0$$

$$\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\sin\left(\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\right) \geqslant 0$$ (2 boda)

Zbog $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ vrijedi

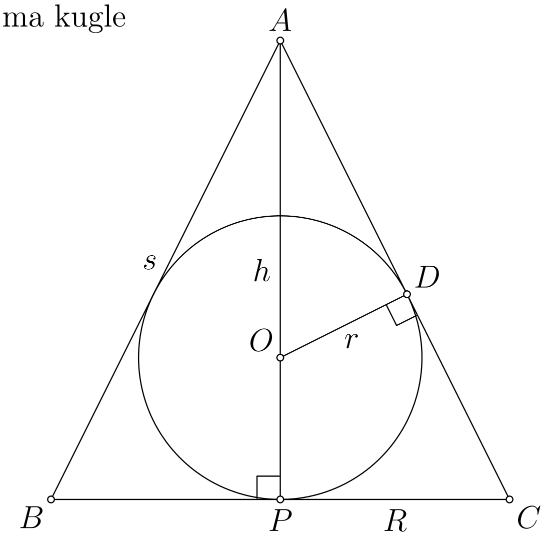
$$\sin\left(\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\right) = \sin\left(\frac{3(180° - \gamma)}{2}\right) = \sin\left(270° - \frac{3\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\frac{3\gamma}{2}\right)$$ (2 boda)

pa je tražena nejednakost ekvivalentna s $\cos\left(\dfrac{3\gamma}{2}\right) \leqslant 0$.

Ta nejednakost vrijedi jer je, zbog $\gamma \geqslant 60°$, $\dfrac{3\gamma}{2} \geqslant 90°$. (1 bod)

Zadatak A-3.4.

Odredi najveću moguću vrijednost omjera obujma kugle i obujma njoj opisanog uspravnog stošca.



Prvo rješenje.

Na slici je prikazan poprečni presjek kugle i njoj opisanog uspravnog stošca.

Označimo točke kao na slici, te neka je

$|OD| = r, \;\; |PC| = R, \;\; |AP| = h.$

Kako je

$\sphericalangle OAD = \sphericalangle CAP$ i

$\sphericalangle ADO = \sphericalangle APC = 90°,$

trokuti ADO i APC su slični. (1 bod)

Odatle slijedi $\dfrac{|AO|}{|DO|} = \dfrac{|AC|}{|PC|},$ (1 bod)

odnosno $\dfrac{h-r}{r} = \dfrac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}.$ (1 bod)

Nakon kvadriranja dobivamo $\dfrac{h^2-2hr+r^2}{r^2} = \dfrac{h^2+R^2}{R^2}$

odakle slijedi $h^2R^2 - 2hrR^2 = h^2r^2$ i konačno $h = \dfrac{2rR^2}{R^2-r^2}.$ (1 bod)

Promatrani omjer je

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3}R^2\pi \cdot h} = \frac{4r^3}{R^2h} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{4r^3}{R^2} \cdot \frac{R^2-r^2}{2rR^2} = \frac{2r^2\left(R^2-r^2\right)}{R^4}$$

$$= -2\left(\frac{r}{R}\right)^4 + 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad \text{(2 boda)}$$

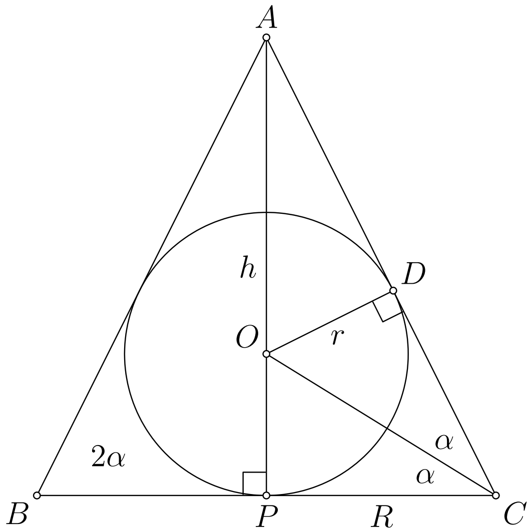
$$= \frac{1}{2} - 2\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

pa traženi maksimum iznosi $\dfrac{1}{2}$ (i postiže se za $R = r\sqrt{2}$). (2 boda)

Drugo rješenje.

Označimo točke kao na slici. Neka je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 2\alpha$.

Kako je O središte kružnice upisane trokutu ABC, pravac OC je simetrala kuta ABC pa vrijedi $\sphericalangle OCP = \sphericalangle OCD = \alpha$. (1 bod)



Vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|OP|}{|PC|} = \dfrac{r}{R}$ pa je $r = R\operatorname{tg}\alpha$, (1 bod)

i $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{|AP|}{|PC|} = \dfrac{h}{R}$ pa je $h = R\operatorname{tg}2\alpha$. (1 bod)

Promatrani omjer iznosi $\dfrac{V_K}{V_S} = \dfrac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3}R^2\pi\cdot h} = \dfrac{4r^3}{R^2h}$. (2 boda)

Kako je $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, (1 bod)

imamo

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{4\left(r\operatorname{tg}\alpha\right)^3}{r^3\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}^3\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}^3\alpha}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = 2\operatorname{tg}^2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Označimo $t = \operatorname{tg}^2\alpha$.

Tada je $\dfrac{V_K}{V_S} = 2t\,(1-t) = \dfrac{1}{2} - 2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2$

pa je traženi maksimalni omjer jednak $\dfrac{1}{2}$. (2 boda)

Treće rješenje.

Koristimo iste oznake kao u prvom rješenju, te $|AB| = |AC| = s$.

Površina trokuta ABC iznosi $\frac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h = Rh$,

pa je polumjer njegove upisane kružnice

$$r = \frac{\text{površina}}{\text{poluopseg}} = \frac{Rh}{\frac{1}{2}(2s+2R)} = \frac{Rh}{s+R} \qquad \text{(2 boda)}$$

Promatrani omjer je

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3} \cdot R^2\pi \cdot h} = \frac{4r^3}{R^2h} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{4R^3h^3}{R^2h(s+R)^3} = \frac{4Rh^2}{(s+R)^3}$$

$$= \frac{4R(s^2-R^2)}{(s+R)^3} = \frac{4R(s-R)}{(s+R)^2}$$

$$= \frac{4\left(\frac{s}{R}-1\right)}{\left(\frac{s}{R}+1\right)^2} \qquad \text{(2 boda)}$$

Uvedimo supstituciju $t = \frac{s}{R} - 1$. Tada je $\frac{s}{R} + 1 = t + 2$

pa je promatrani izraz $\frac{4t}{(t+2)^2}$. (1 bod)

Kako vrijedi $(t-2)^2 \geqslant 0$ slijedi $(t+2)^2 \geqslant 8t$. (1 bod)

Stoga je

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{4t}{(t+2)^2} \leqslant \frac{4t}{8t} = \frac{1}{2} \qquad \text{(3 boda)}$$

(Jednakost se postiže ako i samo ako je $t = 2$, odnosno $s = 3R$.)

Zadatak A-3.5.

Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a+b+c=abc$.
Dokaži da vrijedi

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)\geqslant 54\sqrt{3}.$$

Rješenje.

Vrijedi

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)=abc(a^4+b^4+c^4)-(a^5+b^5+c^5),$$

a zbog uvjeta $abc=a+b+c$ dalje imamo

$$\begin{aligned} abc(a^4+b^4+c^4)-(a^5+b^5+c^5) &= (a+b+c)(a^4+b^4+c^4)-a^5-b^5-c^5 \\ &= ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4 \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Primjenom A–G nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4 &\geqslant 6\sqrt[6]{ab^4\cdot ac^4\cdot bc^4\cdot ba^4\cdot ca^4\cdot cb^4} \\ &= 6\sqrt[6]{a^{10}b^{10}c^{10}}. \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Sada treba iskoristiti dani uvjet.

Primjenom A-G nejednakosti na brojeve a, b, c dobivamo

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}, \qquad \text{(1 bod)}$$

pa zbog uvjeta slijedi $abc\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, odnosno $abc\geqslant 3\sqrt{3}$. (3 boda)

Dakle vrijedi

$$6\sqrt[6]{a^{10}b^{10}c^{10}}=6\sqrt[6]{(abc)^{10}}\geqslant 6\sqrt[6]{\left(3\sqrt{3}\right)^{10}}=6\cdot 9\sqrt{3}=54\sqrt{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Time smo dokazali traženu nejednakost.