ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve četveroznamenkaste brojeve, čije su prve dvije znamenke međusobno jednake i zadnje dvije znamenke međusobno jednake, a koji su potpuni kvadrati (tj. kvadrati nekog prirodnog broja).

Prvo rješenje.

Neka je traženi broj kvadrat broja n, dakle $n^2 = \overline{aabb}$.

Vrijedi

$$\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b) = 11 \cdot \overline{a0b}$$ (1 bod)

pri čemu su a i b znamenke, $a \neq 0$,

tj. broj $\overline{aabb} = n^2$ je djeljiv s 11.

Odavde zaključujemo da je n djeljiv s 11, (1 bod)

tj. $n = 11k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

No, to znači da je traženi broj oblika $121k^2$.

Da bi taj broj bio četveroznamenkast mora biti $k \geqslant 3$ i $k \leqslant 9$. (1 bod)

Računamo redom

k	3	4	5	6	7	8	9
$121k^2$	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801

(6 bodova*)

Vidimo da je jedino rješenje broj 7744 (kvadrat broja 88). (1 bod)

Napomena.

Gornjih 6 bodova dodjeljuje se po jedan bod za rješenje (eliminaciju) svakog pojedinog slučaja, za k iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Ako je vrijednost $121k^2$ pogrešno izračunata, taj bod se ne dodjeljuje.

Neki slučajevi mogu se eliminirati i promatrajući zadnje znamenke broja $(11k)^2$.

Npr. za $k = 5$, kvadrat broja 55 završava znamenkama 25, pa nije traženog oblika.

Ili, kako kvadrat prirodnog broja ne može završiti znamenkama 66 (jer je takav broj paran, a nije djeljiv s 4), traženi broj nije kvadrat broja 44 niti 66 (jer njihovi kvadrati završavaju znamenkom 6).

Drugo rješenje.

Traženi broj je oblika

$$\begin{aligned}\overline{aabb} &= 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b \\ &= 11 \cdot (100a + b) \qquad \text{(1 bod)}\end{aligned}$$

gdje je $a \neq 0$.

Budući da je traženi broj potpuni kvadrat, zaključujemo da izraz $100a + b$ mora biti djeljiv sa 11. (1 bod)

Budući da je $100a + b = 99a + (a + b)$, to znači da $11 \mid a + b$,
a kako je $1 \leqslant a + b \leqslant 18$, zaključujemo da je $a + b = 11$. (1 bod)

Stoga je traženi broj oblika

$$11 \cdot (99a + 11) = 11^2 \cdot (9a + 1).$$

Sada vidimo da $(9a + 1)$ mora biti potpuni kvadrat. (1 bod)

Dakle mora biti $9a = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ za neki prirodan broj m. (1 bod)

Budući da je $a \leqslant 9$, zaključujemo da je $m \leqslant 9$.

Jedini zajednički djelitelj brojeva $m - 1$ i $m + 1$ može biti 2,
pa 9 mora dijeliti jednog od njih. (2 boda)

To je moguće jedino ako je $m + 1 = 9$, tj. ako je $m = 8$ i $a = m - 1 = 7$. (1 bod)

Sada iz $a + b = 11$ slijedi $b = 4$. (1 bod)

Traženi broj je $7744 = 88^2$. (1 bod)

Napomena.

Jednom kad se uoči da $9a + 1$ potpun kvadrat, može se i računati:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9a+1$	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Jedini kvadrat u donjem retku je 64, pa mora biti $a = 7$.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da je umnožak bilo koja dva elementa skupa

$$\left\{ m \mid m = a^2 - 5b^2, a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

također element tog skupa.

Rješenje.

Neka su m i n elementi danog skupa tj. neka vrijedi

$$m = a^2 - 5b^2, \qquad n = c^2 - 5d^2,$$

pri čemu su a, b, c, d prirodni brojevi.

Tada je

$$\begin{aligned}
m \cdot n &= \left(a^2 - 5b^2\right)\left(c^2 - 5d^2\right) && \text{(1 bod)}\\
&= a^2c^2 - 5b^2c^2 - 5a^2d^2 + 25b^2d^2 && \text{(1 bod)}\\
&= a^2c^2 + 25b^2d^2 + 10abcd - 5b^2c^2 - 5a^2d^2 - 10abcd \\
&= \left(a^2c^2 + 10\, ac \cdot bd + 25b^2d^2\right) - 5\left(b^2c^2 + 2bc \cdot ad + a^2d^2\right) && \text{(5 bodova)}\\
&= (ac + 5bd)^2 - 5\,(bc + ad)^2 . && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Kako su a, b, c, d prirodni brojevi i brojevi $ac + bd$ i $bc + ad$ su također prirodni.
(1 bod)

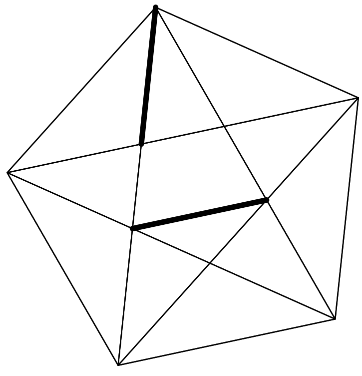
Napomena. Vrijedi i $(a^2 - 5b^2)(c^2 - 5d^2) = (ac - 5bd)^2 - 5\,(bc - ad)^2$.

Učeniku koji napiše takvu jednakost treba dati 7 bodova ili 8 bodova ovisno o tome je li objasnio da se može postići da je broj u zagradi nenegativan.

Dva boda se gube ako ostane mogućnost da je u nekoj zagradi broj jednak nuli.

Zadatak A-1.3.

Na slici je pravilni peterokut s dijagonalama. Dokaži da su istaknute dužine sukladne.

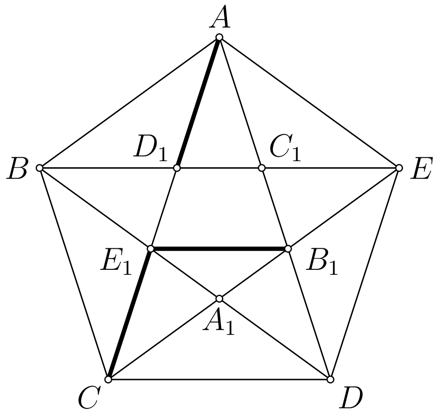


Prvo rješenje.

Budući da je $|CE_1| = |AD_1|$, dovoljno je dokazati da je trokut B_1CE_1 jednakokračan. (1 bod)

Kako je dijagonala pravilnog peterokuta paralelna njegovoj stranici, vrijedi $B_1E_1 \parallel C_1D_1$, odnosno $E_1B_1 \parallel D_1E$. (2 boda)

Promotrimo trokute CB_1E_1 i CED_1.



Kako su im odgovarajuće stranice paralelne, oni imaju jednake kutove (kutovi s paralelnim kracima) pa je $\sphericalangle CB_1E_1 = \sphericalangle CED_1$. (3 boda)

Zbog simetrije peterokuta trokut CED_1 je jednakokračan pa je $\sphericalangle CED_1 = \sphericalangle ECD_1$. (2 boda)

Konačno dobivamo $\sphericalangle CB_1E_1 = \sphericalangle B_1CE_1$ što znači da je trokut CB_1E_1 jednakokračan, a to smo i htjeli dokazati. (2 boda)

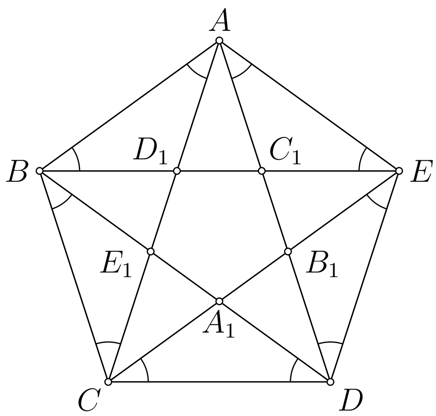
Drugo rješenje.

Unutarnji kut pravilnog peterokuta je $3 \cdot 180°/5 = 108°$. (1 bod)

Kako je trokut $\triangle CDE$ jednakokračan vrijedi

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle DEC = (180° - \sphericalangle CDE)/2 = (180° - 108°)/2 = 36°. \quad \text{(1 bod)}$$

Jasno je da su svi označeni kutovi na donjoj slici sukladni, i iznose 36°. (1 bod)



Zato su kutovi $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle EBD$, $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle BDA$ i $\sphericalangle CEB$ svi jednaki

$$\sphericalangle BDA = 108^\circ - \sphericalangle CDB - \sphericalangle EDA = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ. \qquad \text{(2 boda)}$$

Dalje možemo nastaviti na razne načine.

Prvi način.

Uočimo da zbog simetrije vrijedi $|AD_1| = |CE_1|$.

Stoga je dovoljno dokazati da je trokut CB_1E_1 jednakokračan. (1 bod)

Peterokut $A_1B_1C_1D_1E_1$ je također pravilan pa je i $\sphericalangle A_1B_1E_1 = 36^\circ$. (2 boda)

Stoga je trokut $\triangle CB_1E_1$ jednakokračan i time je tvrdnja dokazana. (2 boda)

Drugi način.

Analogno, u pravilnom peterokutu $A_1B_1C_1D_1E_1$ vrijedi $\sphericalangle D_1B_1E_1 = 36^\circ$. (1 bod)

Promotrimo trokute BD_1E_1 i $B_1D_1E_1$.
Oba su jednakokračna i imaju po jedan kut od 36°. (1 bod)

Kutovi uz zajedničku stranicu $\overline{D_1E_1}$ u oba trokuta su jednaki 72° pa su ti trokuti sukladni (po poučku "kut-stranica-kut"). (1 bod)

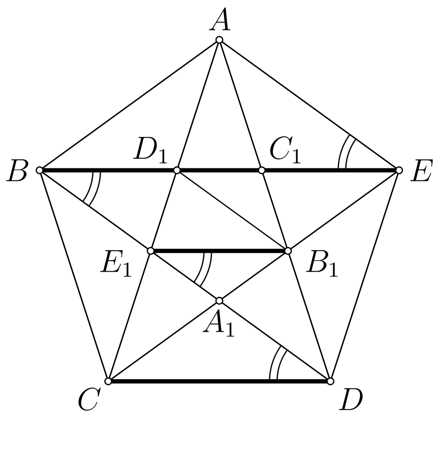
Stoga je $|B_1E_1| = |BD_1|$, a kako je očito $|BD_1| = |AD_1|$, (2 boda)

time je tvrdnja dokazana.

Treći način.

Analogno, u pravilnom peterokutu $A_1B_1C_1D_1E_1$ vrijedi $\sphericalangle A_1E_1B_1 = 36^\circ$. (1 bod)

Sada iz $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBE = \sphericalangle A_1E_1B_1$ (jer su svi jednaki 36°)



slijedi $BE \parallel CD \parallel E_1B_1$. (1 bod)

Analogno je i $BD \parallel AE \parallel B_1D_1$.

Stoga je četverokut $BE_1B_1D_1$ paralelogram (1 bod)

i njegove nasuprotne stranice $\overline{BD_1}$ i $\overline{E_1B_1}$ su sukladne. (1 bod)

Kako je $|BD_1| = |AD_1|$, time smo dokazali tvrdnju zadatka. (1 bod)

Zadatak A-1.4.

U nekom trokutu jedna je srednjica dulja od jedne težišnice. Dokaži da je taj trokut tupokutan.

Prvo rješenje.

Neka je dan trokut ABC i neka su P, Q, R redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.

Bez smanjenja općenitosti, neka je $\overline{AP}$ težišnica koja je kraća od jedne od srednjica.

Postoje dva bitno različita slučaja ovisno o tome jesu li srednjica i težišnica pridružene istim ili različitim stranicama trokuta.

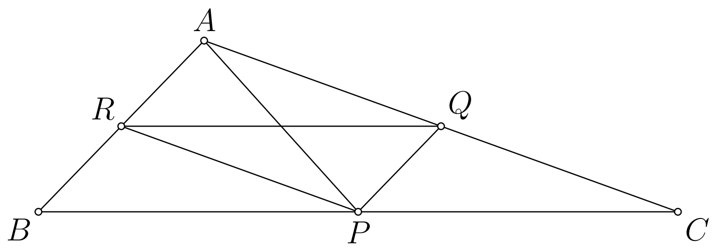
1. slučaj

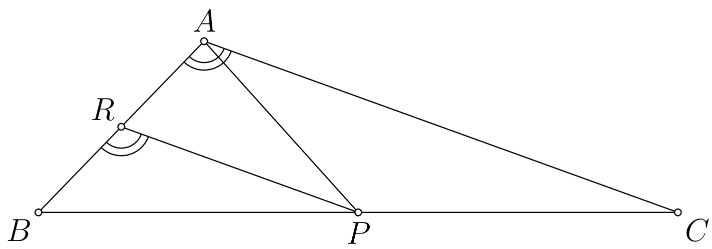
Pretpostavimo da je $|RQ| > |AP|$.

Dužine $\overline{RP}$ i $\overline{PQ}$ su srednjice trokuta ABC pa je $ARPQ$ je paralelogram. (2 boda)

$\overline{RQ}$ je dulja dijagonala paralelograma $ARPQ$, pa je kut nasuprot njoj tupi kut.

Dakle, kut $\sphericalangle BAC$ je tupi. (3 boda)





2. slučaj

Pretpostavimo da je $|RP| > |AP|$. (Slučaj $|PQ| > |AP|$ rješava se analogno.)

$\overline{AP}$ nije najdulja stranica trokuta ARP pa je $\sphericalangle ARP$ šiljasti kut. (1 bod)

Zato je $\sphericalangle BRP$ tupi, (1 bod)

a zbog $PR \parallel AC$ vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BRP$ (1 bod)

pa je i $\sphericalangle BAC$ tupi kut. (2 boda)

Drugo rješenje.

Koristimo oznake kao u prvom rješenju.

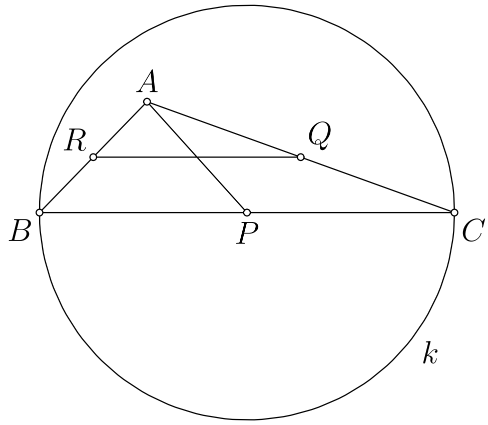
Bez smanjenja općenitosti, neka je $\overline{RQ}$ srednjica koja je dulja od jedne od težišnica.

Postoje dva bitno različita slučaja ovisno o tome jesu li srednjica i težišnica iz zadatka pridružene istim ili različitim stranicama trokuta.

1. slučaj

Pretpostavimo da je $|RQ| > |AP|$.

Neka je k kružnica s promjerom $\overline{BC}$. (1 bod)



Tada je $|AP| < |RQ| = |BP| = |CP|$. (1 bod)

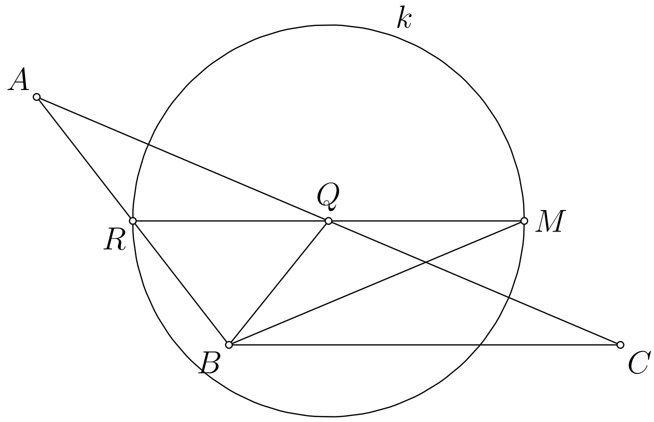
Dakle, $|AP|$ je manje od polumjera kružnice k
pa se točka A nalazi unutar te kružnice (1 bod)

odakle slijedi da je kut $\sphericalangle BAC$ tupi. (2 boda)

2. slučaj

Pretpostavimo da je $|RQ| > |BQ|$. (Slučaj $|RQ| > |CR|$ rješava se analogno.)

Neka je k kružnica sa središtem u Q i promjerom $\overline{RM}$. (1 bod)



Budući da je $|BQ|$ manje od polumjera od k, B se nalazi unutar kružnice k, (1 bod)

pa je kut $\sphericalangle MBR$ tupi, (2 boda)

odakle slijedi da je i kut $\sphericalangle ABC$ koji je od njega veći također tupi. (1 bod)

Zadatak A-1.5.

Prijateljice Anica i Neda igraju igru tako da u svakom potezu, nakon što jedna od njih kaže broj n, druga mora reći neki broj oblika $a \cdot b$ pri čemu su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a + b = n$. Igra se zatim nastavlja na isti način, od upravo izrečenog broja. S kojim je sve brojevima mogla započeti igra ako je nakon određenog vremena jedna od njih rekla broj 2011 ?

Rješenje.

Uočimo da se potezom

$$n = (n-1) + 1 \qquad \mapsto \qquad (n-1) \cdot 1 = n - 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

izrečeni broj smanjuje točno za 1
pa se nizom takvih poteza izrečeni broj može po volji smanjiti. (2 boda)

Potezom

$$n = (n-2) + 2 \qquad \mapsto \qquad (n-2) \cdot 2 = 2n - 4 \qquad \text{(1 bod)}$$

se izrečeni broj n povećava ukoliko vrijedi $2n - 4 > n$, tj. ako je $n > 4$. (2 boda)

Krenuvši od bilo kojeg broja $n > 4$, ponavljanjem tog poteza
može se doći do nekog broja koji je veći od 2011 (1 bod)

i zatim smanjivanjem kako je gore opisano možemo dobiti broj 2011. (1 bod)

Uočimo da brojeve 1, 2, 3, 4 dopuštenim potezima ne možemo uvećati:

$$\begin{array}{llll} 2 = 1 + 1 & 3 = 2 + 1 & 4 = 3 + 1 & 4 = 2 + 2 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 2 \cdot 1 = 2 & 3 \cdot 1 = 3 & 2 \cdot 2 = 2 \end{array}$$

pa počevši od njih ne možemo doći do broja 2011. (2 boda)

Dakle, igra je mogla početi bilo kojim brojem n koji zadovoljava $n \geqslant 5$.