# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

## Zadatak A-2.1.

Odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$2a^2 - 2ab + b^2 = a$$
$$4a^2 - 5ab + 2b^2 = b$$

u skupu realnih brojeva.

### *Prvo rješenje.*

Pomnožimo li prvu jednadžbu s 2, a zatim to oduzmemo od druge jednadžbe,
dobit ćemo $ab = 2a - b$. $(*)$ (1 bod)

Slijedi $b = \dfrac{2a}{a+1}$. (1 bod)

(Za $a = -1$ iz $(*)$ bi slijedilo $a = 0$, pa je $a \neq -1$.)

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu danog sustava dobiva se:

$$2a^2 - 2a \cdot \frac{2a}{a+1} + \frac{4a^2}{(a+1)^2} = a, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$2a^2 (a+1)^2 - 4a^2 (a+1) + 4a^2 = a (a+1)^2,$$

$$2a^4 - a^3 - a = 0, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$a (a-1) \left(2a^2 + a + 1\right) = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Odavde je $a = 0$ ili $a = 1$ ili $2a^2 + a + 1 = 0$. (1 bod)

Za $a = 0$ dobije se $b = 0$, pa je $(0, 0)$ jedno rješenje danog sustava.

a za $a = 1$ dobije se $b = 1$, pa je i $(1, 1)$ rješenje. (1 bod)

Jednadžba $2a^2 + a + 1 = 0$ nema realna rješenja jer je
njena diskriminanta negativna $(D = -7)$. (2 boda)

Dakle, rješenja danog sustava jednadžbi su

$$(a, b) \in \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

***Napomena.*** Iz $(*)$ slijedi $a = \dfrac{b}{2-b}$.

Analogno kao u gornjem rješenju dobivamo $b^4 - 2b^3 + 3b^2 - 2b = 0$,

odnosno $b (b-1) \left(b^2 - b + 2\right) = 0$.

***Drugo rješenje.***

Množenjem prve jednadžbe s $b$ i druge s $a$, dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}2a^2b - 2ab^2 + b^3 &= ab\\ 4a^3 - 5a^2b + 2b^2a &= ab\end{aligned}$$

čijim oduzimanjem dobivamo

$$b^3 - 4b^2a + 7a^2b - 4a^3 = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz $a = 0$ slijedi $b = 0$ pa je $(a, b) = (0, 0)$ jedno rješenje sustava.

Za $a \neq 0$, uz oznaku $w = \dfrac{b}{a}$, imamo

$$w^3 - 4w^2 + 7w - 4 = 0, \qquad \text{(2 boda)}$$

Jedno rješenje te jednadžbe je $w = 1$, pa jednadžbu možemo faktorizirati:

$$(w - 1)(w^2 - 3w + 4) = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Za $w = 1$ vrijedi $b = a$, (1 bod)

a potom se, uvrštavanjem u polazni sustav, zbog $a \neq 0$,
dobije jedno rješenje $(a, b) = (1, 1)$. (1 bod)

Jednadžba $w^2 - 3w + 4 = 0$ ima diskriminantu $-7$, pa njena rješenja nisu realna,

te stoga ni dani sustav nema više realnih rješenja. (2 boda)

## Zadatak A-2.2.

Tetiva $\overline{AB}$ paralelna je s promjerom $\overline{MN}$ kružnice. Neka je $t$ tangenta te kružnice u točki $M$ te neka su točke $C$ i $D$ redom sjecišta pravaca $NA$ i $NB$ s pravcem $t$. Dokaži da vrijedi

$$|MC| \cdot |MD| = |MN|^2 .$$

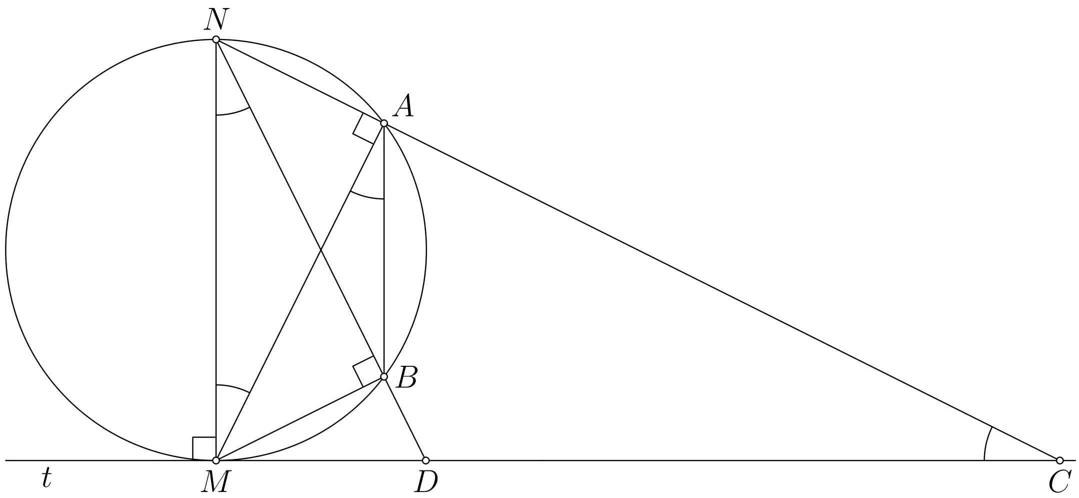
### *Rješenje.*

Neka je $\sphericalangle MND = \alpha$. Tada je

$$\alpha = \sphericalangle MNB = \sphericalangle MAB \qquad \text{(obodni kutovi)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \sphericalangle AMN \qquad \text{(jer je } AB \parallel MN) \qquad \text{(1 bod)}$$

pa je $\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMN - \sphericalangle AMN = 90^\circ - \alpha$. (1 bod)




Uočimo da je trokut $MAN$ pravokutan jer je $\overline{MN}$ promjer kružnice. (1 bod)

Stoga je $MA \perp NC$, te iz pravokutnog trokuta $AMC$ dobivamo

$$\sphericalangle ACM = 90^\circ - \sphericalangle AMC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha. \qquad \text{(1 bod)}$$

Sada vidimo da su trokuti $MCN$ i $MND$ slični jer su im odgovarajući kutovi sukladni. ($\sphericalangle MCN = \sphericalangle MND = \alpha$, $\sphericalangle NMC = \sphericalangle DMN = 90^\circ$) (2 boda)

Stoga vrijedi jednakost

$$\frac{|MC|}{|MN|} = \frac{|MN|}{|MD|}, \qquad \text{(2 boda)}$$

koja je ekvivalentna s $|MC| \cdot |MD| = |MN|^2$. (1 bod)

### *Napomena.*

Poznato je da je kut između tetive i tangente jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

Nakon što se dokaže da je $\sphericalangle MND = \sphericalangle NCM$ može se nastaviti ovako:

Neka je $k$ kružnica koja prolazi točkama $C$, $D$ i $N$. Kut $\sphericalangle NCD$ je obodni kut nad tetivom $\overline{DN}$, a $\sphericalangle MND$ kut između te tetive i pravca $NM$. Kako su ti kutovi jednaki, zaključujemo da je $MN$ tangenta na kružnicu $k$.

Sada koristeći svojstvo potencije točke $M$ u odnosu na kružnicu $k$ dobivamo željenu relaciju: $|MC| \cdot |MD| = |MN|^2$.

**Zadatak A-2.3.**

Duljine svih stranica i dijagonala pravokutnika su prirodni brojevi. Dokaži da je njegova površina prirodan broj djeljiv s 12.

***Rješenje.***

Označimo s $a$ i $b$ duljine stranica, a sa $d$ duljinu dijagonale danog pravokutnika.

Vrijedi $a^2 + b^2 = d^2$, a treba dokazati da je $ab$ djeljivo s 12.

Najprije ćemo dokazati da je jedan od brojeva $a$ i $b$ djeljiv s 3 (pa je i $ab$ djeljivo s 3). Pretpostavimo suprotno, da nijedan od brojeva $a$ i $b$ nije djeljiv s 3.

Takvi brojevi daju ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju s 3, a njihovi kvadrati $a^2$ i $b^2$ daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3. No, to znači da $d^2$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, što je nemoguće. (3 boda)

Sada dokažimo da je $ab$ djeljivo s 4. Promotrimo tri različita slučaja:

*1. slučaj* Ako su $a$ i $b$ oba parni, tvrdnja očito vrijedi. (1 bod)

*2. slučaj* Neka su brojevi $a$ i $b$ neparni.

Tada $a^2$ i $b^2$ daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4
pa $d^2$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4, a to ne može biti. (2 boda)

*3. slučaj* Neka su sada $a$ i $b$ različite parnosti.
Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je $a$ neparan, a $b$ paran.

Tada je $d$ očito neparan pa možemo staviti $a = 2k + 1$, $b = 2m$, $d = 2n + 1$ za neke prirodne brojeve $k$, $l$, $m$. Imamo:

$$
\begin{aligned}
(2k+1)^2 + (2l)^2 &= (2m+1)^2, \\
4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 &= 4m^2 + 4m + 1, \\
k(k+1) + l^2 &= m(m+1).
\end{aligned}
$$
(1 bod)

Brojevi $k(k+1)$ i $m(m+1)$ su parni (1 bod)

pa onda i $l^2$ mora biti paran, što znači da je $l$ paran, (1 bod)

a to znači da je $b$ djeljiv s 4 pa je i $ab$ djeljiv s 4. (1 bod)

Konačno zaključujemo da je broj $ab$ djeljiv s $3 \cdot 4 = 12$.

### Zadatak A-2.4.

Neka su $x$, $y$, $z$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.
Dokaži da je tada

$$x^2 + y^2 + z^2 > x^5 + y^5 + z^5 + 2x^2y^2z^2(x + y + z).$$

***Prvo rješenje.***

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 1 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3) && \text{(1 bod)} \\ &= x^5 + y^5 + z^5 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3 && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Koristeći elementarne nejednakosti

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy \qquad y^2 + z^2 \geqslant 2yz \qquad z^2 + x^2 \geqslant 2zx$$

dobivamo

$$\begin{aligned} & x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3 \\ &\qquad = x^3\left(y^2 + z^2\right) + y^2\left(x^2 + z^2\right) + z^3\left(x^2 + y^2\right) \\ &\qquad \geqslant x^3 \cdot 2yz + y^2 \cdot 2xz + z^3 \cdot 2xy && \text{(2 boda)} \\ &\qquad = 2xyz\left(x^2 + y^2 + z^2\right). && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Potrebno je još pokazati $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xyz\,(x + y + z)$.

Primijetimo da iz uvjeta zadatka slijedi da su $x, y, z$ iz intervala $\langle 0, 1\rangle$. (1 bod)

Stoga vrijedi $0 < y \cdot z < 1$ pa je $x^2 > x^2 \cdot yz$. (2 boda)

Slično je i $y^2 > y^2 \cdot xz$, $z^2 > z^2 \cdot xy$,

pa imamo

$$x^2 + y^2 + z^2 > x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz\,(x + y + z) \qquad \text{(2 boda)}$$

što je i trebalo dokazati.

***Drugo rješenje.***

Treba dokazati da je

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^5+y^5+z^5\right)-2x^2y^2z^2(x+y+z)>0.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
A &= \left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^5+y^5+z^5\right)-2x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)\\
&= \left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot 1-\left(x^5+y^5+z^5\right)-2x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)\\
&= \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)-x^5-y^5-z^5-2x^2y^2z^2\left(x+y+z\right)
\end{aligned}$$

(1 bod)

$$= x^2y^3+x^2z^3+y^2x^3+y^2z^3+z^2x^3+z^2y^3-2x^3y^2z^2-2x^2y^3z^2-2x^2y^2z^3$$

(1 bod)

$$= x^3\left(y^2+z^2-2y^2z^2\right)+y^3\left(x^2+z^2-2x^2z^2\right)+z^3\left(x^2+y^2-2x^2y^2\right)$$

(1 bod)

Vrijedi

$$\begin{aligned}
y^2+z^2-2y^2z^2 &= y^2-y^2z^2+z^2-y^2z^2\\
&= y^2\left(1-z^2\right)+z^2\left(1-y^2\right).
\end{aligned}$$

(2 boda)

Primijetimo da iz uvjeta zadatka slijedi da su $x, y, z$ iz intervala $\langle 0, 1\rangle$ (1 bod)

pa vrijedi i $1-y^2>0,\ 1-z^2>0$ odnosno $y^2+z^2-2y^2z^2>0$ (2 boda)

i analogno, $z^2+x^2-2z^2x^2>0$ i $x^2+y^2-2x^2y^2>0$,

te konačno dobivamo $A>0$. (2 boda)

***Napomena.*** Nejednakost $y^2+z^2-2y^2z^2>0$ možemo dokazati i ovako:

Vrijedi $y^2+z^2-2y^2z^2=1-(1-y^2)(1-z^2)$.

Kako je zbog uvjeta zadatka $0<x, y, z<1$, vrijedi $1-y^2<1$ i $1-z^2<1$ pa je $(1-y^2)(1-z^2)<1$ i konačno

$$y^2+z^2-2y^2z^2=1-(1-y^2)(1-z^2)>0.$$

***Napomena.***

Učenik koji ne dokaže strogu nejednakost već samo nejednakost

$$x^2+y^2+z^2\geqslant x^5+y^5+z^5+2x^2y^2z^2(x+y+z)$$

gubi 1 bod.

**Zadatak A-2.5.**

Dokaži da u skupu od devet prirodnih brojeva, od kojih ni jedan nema prostog djeljitelja većeg od 6, postoje dva broja čiji je umnožak potpun kvadrat (kvadrat nekog prirodnog broja).

***Rješenje.***

Jedini mogući prosti djelitelji danih devet brojeva su 2, 3 i 5,

pa se radi o brojevima oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. (1 bod)

Razvrstajmo te brojeve u klase, ovisno o parnosti pojedinih eksponenata:

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| paran | paran | paran |
| paran | paran | neparan |
| paran | neparan | paran |
| paran | neparan | neparan |
| neparan | paran | paran |
| neparan | paran | neparan |
| neparan | neparan | paran |
| neparan | neparan | neparan |

Tih klasa ima $2^3 = 8$. (3 boda)

Broj je potpun kvadrat ako i samo ako su u njegovom rastavu na proste faktore svi eksponenti parni.

Lako se vidi da umnožak dva broja iz različitih klasa nije potpun kvadrat i da je umnožak dva broja koja pripadaju istoj klasi uvijek potpun kvadrat. (3 boda)

Kako je dano devet brojeva, po Dirichletovom principu barem u jednoj klasi nalaze se barem dva broja. Njihov umnožak je potpun kvadrat. (3 boda)