ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$, u tom poretku, uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Dokaži da su brojevi a i b jednaki.

Prvo rješenje.

Činjenicu da $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ i $\log_{4b}(4a)$ čine aritmetički niz možemo zapisati kao:

$$\log_{2b}(2a) = \frac{1}{2}\big(\log_b a + \log_{4b}(4a)\big). \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako vrijedi $\log_x y = \dfrac{\log_2 y}{\log_2 x}$, dalje imamo

$$2 \cdot \frac{\log_2(2a)}{\log_2(2b)} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{\log_2(4a)}{\log_2(4b)}$$

$$2 \cdot \frac{1+\log_2 a}{1+\log_2 b} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{2+\log_2 a}{2+\log_2 b} \qquad \text{(3 boda)}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo supstituciju $A = \log_2 a$, $B = \log_2 b$.

Tada je

$$2 \cdot \frac{1+A}{1+B} = \frac{A}{B} + \frac{2+A}{2+B} \qquad \text{(2 boda)}$$

Pomnožimo tu jednakost s $B(1+B)(2+B)$ i sredimo:

$$2B(2+B)(1+A) = A(1+B)(2+B) + (2+A)B(1+B),$$

$$4B + 4AB + 2B^2 + 2AB^2 = 2A + 2AB + AB + AB^2 + 2B + 2B^2 + AB + AB^2.$$

Konačno dobivamo $A = B$, (2 boda)

tj. $\log_2 a = \log_2 b$, pa je $a = b$, što je i trebalo dokazati. (1 bod)

Drugo rješenje.

Neka je $x = \log_b a$, $y = \log_{2b}(2a)$, $z = \log_{4b}(4a)$.

Tada je $b^x = a$, $(2b)^y = 2a$, $(4b)^z = 4a$. (2 boda)

Iz uvjeta zadatka je $2y = x + z$. (1 bod)

Računamo:

$$\begin{aligned} 4a^2 &= (2b)^{2y} = (2b)^{x+z} && \text{(1 bod)} \\ &= 2^{x+z} \cdot b^x \cdot b^z = 2^{x+z} \cdot a \cdot \frac{4a}{4^z} && \text{(2 boda)} \\ &= 2^{x-z} \cdot 4 \cdot a^2. \end{aligned}$$

Odatle je $2^{x-z} = 1$ pa slijedi $x = z$. (1 bod)

Sada možemo nastaviti na dva načina:

Prvi način.

Iz $2y = x + z$ slijedi $x = y = z$.

Zbog $(2b)^y = 2a$, imamo

$$\begin{aligned} 2a = (2b)^{\log_b a} &= 2^{\log_b a} \cdot b^{\log_b a} && \text{(1 bod)} \\ &= 2^{\log_b a} \cdot a \end{aligned}$$

odakle slijedi $2^{\log_b a} = 2$ (1 bod)

te konačno $\log_b a = 1$ i $a = b$, (1 bod)

što je i trebalo dokazati.

Drugi način.

Zbog $x = z$ i definicije broja z vrijedi

$$(4b)^x = (4b)^z = 4a = 4b^x. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi $4^x \cdot b^x = 4 \cdot b^x$ pa je $4^x = 4$ odnosno $x = 1$. (1 bod)

Sada je konačno $a = b^x = b^1 = b$. (1 bod)

Zadatak A-4.2.

Neka su a, b, c kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$a+b+c=0, \qquad ab+bc+ca=0.$$

Dokaži da je $|a|=|b|=|c|$.

Prvo rješenje.

Neka je $f(z)=z^3+p\,z^2+q\,z+r$ polinom kojem su nultočke a, b i c.

Zbog Vièteovih formula za polinom trećeg stupnja i danih jednakosti,

vrijedi $p=0$ i $q=0$, (5 bodova)

pa su a, b i c nultočke polinoma $f(z)=z^3+r$. (1 bod)

Iz $a^3+r=b^2+r=c^3+r=0$ slijedi $a^3=b^3=c^3$,

odnosno $|a^3|=|b^3|=|c^3|$ tj. $|a|^3=|b|^3=|c|^3$ i konačno $|a|=|b|=|c|$. (4 boda)

Drugo rješenje.

Iz prve jednadžbe dobivamo da je $a+b=-c$. (1 bod)

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu imamo:

$$0=ab+bc+ca=ab+c(a+b)=ab-c^2,$$

odnosno $ab=c^2$. (3 boda)

Analogno dobivamo $bc=a^2$ i $ca=b^2$. (1 bod)

Sada možemo nastaviti na razne načine.

Prvi način.

Pretpostavimo da nisu $|a|$, $|b|$, $|c|$ svi jednaki.

Neka je, bez smanjenja općenitosti, $|a|<|b|$. (1 bod)

Tada je $|b^2|=|ac|=|a||c|<|b||c|=|bc|=|a^2|$, tj. $|b|^2<|a|^2$. (3 boda)

No, to je u kontradikciji s pretpostavkom. (1 bod)

Drugi način.

Iz dobivenih jednakosti slijedi da je $|a||b|=|c|^2$, $|b||c|=|a|^2$ i $|c||a|=|b|^2$. (1 bod)

Dijeljenjem prvih dviju jednakosti dobivamo:

$$\frac{|a|}{|c|}=\frac{|c|^2}{|a|^2},$$

odnosno $|a|^3=|c|^3$, tj. $|a|=|c|$. (3 boda)

Analogno se pokaže da je $|a|=|b|$ pa vrijedi da je $|a|=|b|=|c|$. (1 bod)

Treći način.

Kao i u drugom načinu, imamo $|a||b| = |c|^2$ i $|b||c| = |a|^2$. (1 bod)

Zbrajanjem dobivamo

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |a||b| + |b||c| + |c||a|, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$(|a| - |b|)^2 + (|b| - |c|)^2 + (|c| - |a|)^2 = 0, \qquad \text{(2 boda)}$$

odakle zaključujemo da je $|a| = |b| = |c|$. (1 bod)

Treće rješenje.

Ukoliko je jedan od brojeva a, b, c jednak nuli, lako se vidi da su i preostala dva jednaka nuli pa je tražena jednakost očito zadovoljena. (1 bod)

Stoga pretpostavimo da su sva tri broja različita od nule.

Dijeljenjem drugog uvjeta s abc dobijemo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Uvrštavanjem $c = -a - b$ u gornju jednakost redom dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b}, \\ b(a+b) + a(a+b) &= ab, \\ a^2 + ab + b^2 &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(4 boda)}$$

Odavde slijedi:

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = 0, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $a^3 = b^3$ iz čega slijedi da je $|a| = |b|$. (2 boda)

Na analogan način se dokaže da je $|a| = |c|$ pa slijedi tražena tvrdnja. (1 bod)

Napomena. Vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0$,

no iz $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ <u>ne slijedi</u> $a = b = c = 0$.

Zadatak A-4.3.

Na rubu kvadrata označeno je ukupno $4n$ točaka: sva četiri vrha kvadrata i još po $n-1$ točaka na svakoj stranici kvadrata. Odredi broj svih (nedegeneriranih) trokuta kojima su označene točke vrhovi.

Prvo rješenje.

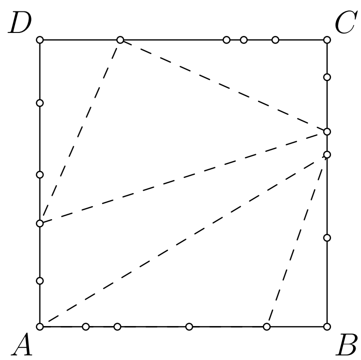
Od danih $4n$ točaka možemo na $\binom{4n}{3}$ načina odabrati tri točke. (3 boda)

Međutim, te tri točke bit će vrhovi trokuta samo ako ne leže na istoj stranici. (1 bod)

Prebrojimo na koliko načina možemo odabrati tri točke na jednoj stranici kvadrata. Kako je na svakoj stranici $n+1$ točka (uključujući i vrhove), to očito možemo na $\binom{n+1}{3}$ načina. (3 boda)

Isto vrijedi za svaku od četiri stranice kvadrata pa ranije dobiveni broj treba umanjiti za $4 \cdot \binom{n+1}{3}$. (1 bod)

Konačno, traženi broj trokuta je $\binom{4n}{3} - 4\binom{n+1}{3}$. (2 boda)



Drugo rješenje.

Razvrstajmo trokute prema tome koliko vrhova trokuta su ujedno i vrhovi kvadrata.

Razlikujemo četiri slučaja:

1. *Sva tri vrha trokuta su vrhovi kvadrata.*

Takvih trokuta ima 4. (1 bod)

2. *Dva vrha trokuta su vrhovi kvadrata.*

Imamo 4 para vrhova koji leže na istoj stranici. Za treći vrh trokuta onda možemo odabrati bilo koju od preostalih $3n-3$ točaka koje ne leže na toj stranici. (1 bod)

Imamo 2 para nasuprotnih vrhova kvadrata. Za treći vrh trokuta možemo odabrati bilo koju od preostalih $4n-4$ točaka. (1 bod)

Dakle, ukupno trokuta ovog tipa ima $4 \cdot (3n-3) + 2 \cdot (4n-4) = 20 \cdot (n-1)$.

3. *Točno jedan vrh trokuta je vrh kvadrata.*

Na 4 načina možemo odabrati vrh kvadrata. Razlikujemo tri podslučaja:

a) Oba preostala vrha se nalaze na stranicama uz istaknuti vrh.

Takvih trokuta ima $(n-1)^2$. (1 bod)

b) Oba preostala vrha nalaze se na stranicama nasuprot vrhu.

Takvih trokuta ima $\binom{2n-2}{2}$. (1 bod)

c) Jedan preostali vrh je uz istaknuti vrh kvadrata, a drugi nasuprot njemu.

Na $2n-2$ načina biramo točku uz vrh, i na $2n-2$ načina biramo točku nasuprot vrhu. Takvih trokuta ima $(2n-2)^2$. (1 bod)

Dakle, ukupno trokuta ovog tipa ima

$$4 \cdot \left((n-1)^2 + \binom{2n-2}{2} + (2n-2)^2\right) = 4 \cdot (7n^2 - 15n + 18).$$

4. *Nijedan vrh trokuta nije vrh kvadrata.*

Ako su svi vrhovi na različitim stranama, takvih trokuta ima $4 \cdot (n-1)^3$. (1 bod)

Ako su 2 vrha na istoj strani, takvih trokuta ima $4 \cdot \binom{n-1}{2} \cdot (3n-3)$.

Dakle, ukupno trokuta ovog tipa ima $4 \cdot (n-1)^3 + 6(n-1)^2(n-2)$. (2 boda)

Dakle, traženih trokuta ukupno ima

$$\begin{aligned} 4 + 20 \cdot (n-1) + 4 \cdot (7n^2 - 15n + 18) + 4 \cdot (n-1)^3 + 6(n-1)^2(n-2) \\ = 10n^3 - 8n^2 + 2n. \end{aligned}$$ (1 bod)

Treće rješenje.

Biramo redom tri vrha trokuta.

Prvi odabrani vrh trokuta može biti vrh kvadrata ili neka od preostalih točaka.

1. *slučaj*

Prvi vrh možemo izabrati na $4n-4$ načina ako ne uzmemo jedan od vrhova kvadrata.

1.1.
U tom slučaju, drugi vrh možemo odabrati na $3n-1$ načina ako ne želimo da bude na istoj stranici kao prvi vrh. Treći vrh tada može biti bilo koja od preostalih $4n-2$ točaka. (1 bod)

1.2.
U slučaju da drugi vrh želimo na istoj stranici (n načina), treći vrh ne smije biti na toj istoj stranici pa ga možemo izabrati na $3n-1$ načina. (1 bod)

Ukupno u 1. slučaju postoji

$$(4n-4) \cdot ((3n-1) \cdot (4n-2) + n \cdot (3n-1))$$ (2 boda)

mogućnosti.

2. *slučaj*

Druga je mogućnost da prvi vrh biramo među vrhovima kvadrata (4 načina).

2.1.
U tom slučaju, drugi vrh možemo izabrati na $2n$ načina tako da bude na istoj stranici kao i prvi vrh. U tom slučaju, preostaje nam $3n-1$ mogućnosti za treći vrh. (1 bod)

2.2.
Ukoliko drugi vrh nije na istoj stranici kao i prvi ($2n-1$ načina), treći vrh može biti bilo koja od preostalih $4n-2$ točaka. (1 bod)

Ukupno u 2. slučaju imamo

$$4\cdot(2n\cdot(3n-1)+(2n-1)\cdot(4n-2)) \qquad \text{(2 boda)}$$

mogućnosti.

Ovakvim brojanjem svaki od trokuta smo brojali $3!=6$ puta, jer poredak vrhova trokuta nije bitan, stoga ukupni broj traženih trokuta iznosi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\cdot\Big[&(4n-4)\cdot((3n-1)\cdot(4n-2)+n\cdot(3n-1))\\ &+4\cdot(2n\cdot(3n-1)+(2n-1)\cdot(4n-2))\Big]\\ &=10n^3-8n^2+2n.\end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak A-4.4.

Kružnice k_1 i k_2, polumjera r i R redom ($r<R$) dodiruju se iznutra u točki A. Neka je p pravac paralelan njihovoj zajedničkoj tangenti, neka je B jedno sjecište pravca p s kružnicom k_1, a C jedno sjecište pravca p s kružnicom k_2, tako da se točke B i C nalaze s iste strane pravca koji spaja središta danih kružnica.
Dokaži da polumjer kružnice opisane trokutu ABC ne ovisi o izboru pravca p i izrazi taj polumjer pomoću r i R.

Prvo rješenje.

Uz oznake kao na slici neka je $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle BAF=\beta$ i neka je traženi polumjer ρ.

Tada je

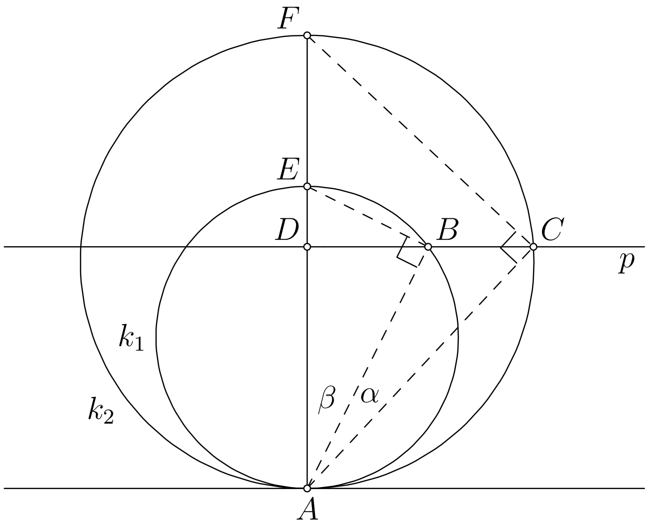
$$\begin{aligned}\sphericalangle ACB&=90^\circ-(\alpha+\beta)\\ \sphericalangle ABC&=180^\circ-\sphericalangle ACB-\alpha=90^\circ+\beta.\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Prema teoremu o sinusu za trokut ABC imamo $\rho=\dfrac{|BC|}{2\sin\alpha}$. (1 bod)

Također, iz teorema o sinusu na trokut ABC dobivamo

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AC|}{\sin(90^\circ+\beta)}=\frac{|AB|}{\sin(90^\circ-(\alpha+\beta))},$$

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AC|}{\cos\beta}=\frac{|AB|}{\cos(\alpha+\beta)}. \qquad (*) \qquad \text{(2 boda)}$$



Trokut ACF je pravokutan (kut nad promjerom $\overline{AF}$ je pravi) (1 bod)

pa je $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{|AC|}{|AF|}$, odnosno $|AC| = 2R\cos(\alpha+\beta)$.

Analogno iz trokuta ABE dobijemo $|AB| = 2r\cos\beta$. (1 bod)

Uvrštavanjem toga u $(*)$ dobivamo

$$\frac{2R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \frac{2r\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\right)^2 = \frac{r}{R}.$$ (2 boda)

Konačno, $\rho = \dfrac{|BC|}{2\sin\alpha} = \dfrac{|AC|}{2\cos\beta} = \dfrac{2R\cos(\alpha+\beta)}{2\cos\beta} = R\cdot\sqrt{\dfrac{r}{R}} = \sqrt{rR}$

što ne ovisi o izboru pravca p. (2 boda)

Drugo rješenje.

Uz oznake iz prvog rješenja, neka je još ρ radijus kružnice opisane trokutu ABC te s x udaljenost pravca p i tangente na dane kružnice u točki A.

Kako je $\rho = \dfrac{|BC|\cdot|CA|\cdot|AB|}{4P(ABC)}$ (2 boda)

vrijedi $\rho = \dfrac{|BC|\cdot|CA|\cdot|AB|}{2\cdot|BC|\cdot x} = \dfrac{|CA|\cdot|AB|}{2x}$. (2 boda)

Trokuti ABE i ACF su pravokutni s hipotenuzama $\overline{AE}$, odnosno $\overline{AF}$. (1 bod)

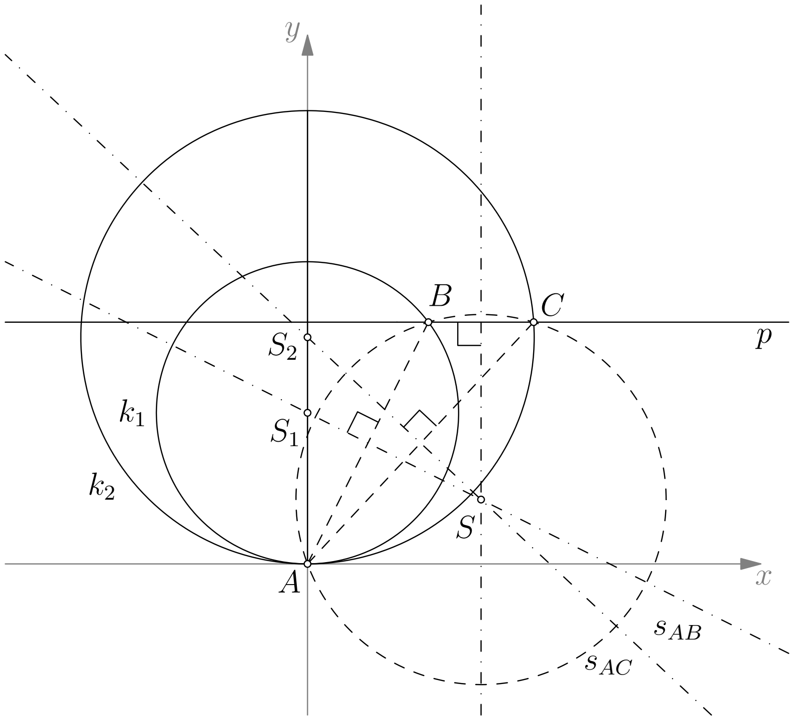
Tada po Euklidovom poučku na te pravokutne trokute vrijedi
$|AB| = \sqrt{2rx}$ i $|CA| = \sqrt{2Rx}$. (3 boda)

Kad to uvrstimo u gornji izraz za radijus ρ, dobivamo $\rho = \dfrac{\sqrt{4rRx^2}}{2x} = \sqrt{rR}$,
što ne ovisi o izboru pravca p. (2 boda)

Treće rješenje.

Postavimo koordinatni sustav tako da zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2 bude x-os, a da njihova središta leže na pozitivnom dijelu y-osi.

Tada je $A = (0, 0)$, a središta kružnica su $S_1 = (0, r)$ i $S_2 = (0, R)$.



Kružnica k_1 ima jednadžbu $x^2 + (y - r)^2 = r^2$,

a kružnica k_2 jednadžbu $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, (1 bod)

Neka je p ordinata točaka $B\,(x_B, y_B)$ i $C\,(x_C, y_C)$.

Točka B leži na kružnici k_1 pa vrijedi $x_B^2 = 2pr - p^2$, $y_B = p$.

Analogno, točka C leži na kružnici k_2 pa je $x_C^2 = 2pR - p^2$, $y_C = p$.

Neka je S središte opisane kružnice trokutu ABC.
Točka S je presjek simetrala dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Jednadžba pravca AB je $y = \dfrac{y_B}{x_B}x$.

Simetrala dužine $\overline{AB}$ prolazi točkom $\left(\dfrac{x_B}{2}, \dfrac{y_B}{2}\right)$ i ima koeficijent smjera $-\dfrac{x_B}{y_B}$,
pa joj je jednadžba

$$y - \frac{y_B}{2} = -\frac{x_B}{y_B}\left(x - \frac{x_B}{2}\right).$$ (1 bod)

Nakon uvrštavanja $x_B^2 = 2pr - p^2$, $y_B = p$ i sređivanja dobivamo

$$s_{AB} \quad \ldots \quad yp + x_B x = rp.$$ (1 bod)

Analogno, jednadžba simetrale dužine $\overline{AC}$ je

$$s_{AC} \quad \ldots \quad yp + x_C x = Rp.$$ (1 bod)

Zbrojimo li te dvije jednadžbe dobivamo

$$2yp + x\left(x_B + x_C\right) = p\left(R + r\right). \qquad \text{(1 bod)}$$

Nadalje, točka S leži na simetrali dužine $\overline{BC}$ (ta je simetrala paralelna s osi y), pa je $2x_S = x_B + x_C$. (1 bod)

Iz toga slijedi $2py_S + \dfrac{\left(x_B + x_C\right)^2}{2} = p\left(R + r\right)$, (1 bod)

što je, nakon uvrštavanja $x_B^2 = 2pr - p^2$ i $x_C^2 = 2pR - p^2$ ekvivalentno s

$$y_S = \frac{p}{2} - \frac{x_B x_C}{2p}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kružnica k prolazi kroz $A = (0, 0)$ pa je kvadrat njenog polumjera

$$\begin{aligned}
x_S^2 + y_S^2 &= \left(\frac{x_B + x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{x_B x_C}{2p}\right)^2 \\
&= \frac{x_B^2 + 2x_B x_C + x_C^2}{4} + \frac{p^2}{4} - \frac{2p x_B x_C}{4p} + \frac{x_B^2 x_C^2}{4p^2} \\
&= \frac{x_B^2 + x_C^2}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{x_B^2 x_C^2}{4p^2} \\
&= \frac{\left(2pr - p^2\right) + \left(2pR - p^2\right)}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{\left(2pr - p^2\right)\left(2pR - p^2\right)}{4p^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(2pr - p^2 + 2pR - p^2 \ + \ p^2 \ + \ 4rR - 2pR - 2pr + p^2\right) \\
&= rR. \qquad \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Dakle, polumjer opisane kružnice trokutu ABC zaista ne ovisi o izboru parametra p i iznosi $\sqrt{rR}$.

Zadatak A-4.5.

Zadan je niz brojeva (a_n) takav da je

$$a_0 = 9 \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3 \quad \text{za sve } k \geqslant 0.$$

Dokaži da dekadski zapis broja a_{11} završava s barem 2011 devetki.

Prvo rješenje.

Ako broj a_n završava s određenim brojem devetki, onda broj $a_n + 1$ završava s isto toliko nula. Definirajmo niz (b_n) tako da je $b_n = a_n + 1$. Treba dokazati da b_{11} završava s barem 2011 nula. (2 boda)

Vrijedi $b_0 = 10$.

Uvrštavanjem $a_k = b_k - 1$ i $a_{k+1} = b_{k+1} - 1$ u danu relaciju dobivamo

$$b_{k+1} - 1 = 3\left(b_k - 1\right)^4 + 4\left(b_k - 1\right)^3 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$b_{k+1} - 1 = 3\left(b_k^4 - 4b_k^3 + 6b_k^2 - 4b_k + 1\right) + 4\left(b_k^3 - 3b_k^2 + 3b_k - 1\right)$$

$$b_{k+1} - 1 = 3b_k^4 - 12b_k^3 + 18b_k^2 - 12b_k + 3 + 4b_k^3 - 12b_k^2 + 12b_k - 4$$

$$b_{k+1} = 3b_k^4 - 8b_k^3 + 6b_k^2 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$b_{k+1} = b_k^2(3b_k^2 - 8b_k + 6) \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz dobivene formule zaključujemo da, ako b_k završava s m nula, onda b_{k+1} završava s barem $2m$ nula. (2 boda)

Kako b_0 završava s jednom nulom, slijedi da b_1 završava s dvije nule, b_2 s četiri nule, b_3 s 8 nula,

i općenito b_k završava s (barem) 2^k nula. (2 boda)

Broj b_{11} završava s barem $2^{11} = 2048$ nula, pa a_{11} završava s barem 2048 devetki. Time je tvrdnja dokazana. (1 bod)

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da a_k završava s l devetki, tj. da je $a_k = A \cdot 10^l - 1$ za neki $A \in \mathbb{N}$. (1 bod)

Tada je

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3\left(A \cdot 10^l - 1\right)^4 + 4\left(A \cdot 10^l - 1\right)^3 && \text{(1 bod)}\\
&= \left(A \cdot 10^l - 1\right)^3 \left(3A \cdot 10^l - 3 + 4\right)\\
&= \left(A^3 \cdot 10^{3l} - 3A^2 \cdot 10^{2l} + 3A \cdot 10^l - 1\right)\left(3A \cdot 10^l + 1\right)\\
&= \left(3A \cdot 10^l + 1\right)\left(A^3 \cdot 10^l - 3A^2\right) \cdot 10^{2l} + \left(3A \cdot 10^l - 1\right)\left(3A \cdot 10^l + 1\right)\\
&= \left[\left(3A \cdot 10^l + 1\right)\left(A^3 \cdot 10^l - 3A^2\right) + 9A^2\right] \cdot 10^{2l} - 1 && \text{(3 boda)}
\end{aligned}$$

a to znači da a_{k+1} završava s $2l$ devetki. (2 boda)

Kako a_0 završava s jednom devetkom, a_1 završava s dvije devetke,$\ldots$,

a_{11} završava s $2^{11} = 2048$ devetki, čime je tvrdnja dokazana. (3 boda)