ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
13. ožujka 2012.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.Kako je $x+y=0$, onda je $(x+y)^2=0^2=0$. 1 BOD

No, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=0$, a kako je $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, onda je $2xy=-\frac{1}{2}$ odnosno $xy=-\frac{1}{4}$.

2 BODA

Dalje je $x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4=$ 2 BODA

$$=(x^4+y^4)^2-2(xy)^4=$$
$$=(x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2)^2-2(xy)^4=$$
$$=((x^2+y^2)^2-2(xy)^2)^2-2(xy)^4=$$ 2 BODA
$$=((\frac{1}{2})^2-2\cdot(-\frac{1}{4})^2)^2-2\cdot(-\frac{1}{4})^4=$$
$$=(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})^2-\frac{1}{128}=$$
$$=\frac{1}{128}$$

3 BODA

…………………………………………………………………….……….. UKUPNO 10 BODOVA

2. Vrijedi

$x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 27$,

$x (x + y) - 2y (x + y) = 27$,

$(x + y) (x - 2y) = 27$ 2 BODA

S obzirom da su djelitelji broja 27 brojevi $\pm1, \pm3, \pm9$ i ±27, trebali bismo riješiti osam sustava jednadžbi da bi našli rješenja polazne jednadžbe. 2 BODA

Četiri sustava jednadžbi ne daju rješenje u skupu cijelih brojeva. 2 BODA

Četiri sustava jednadžbi daju rješenja i to su $(5,-2)$, $(-5, 2)$, $(7,2)$ i $(-7,-2)$. 4 BODA

……………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3.Vrijedi $(9n+1)^2-(n+9)^2=(9n+1+n+9)(9n+1-n-9)=$

$$=(10n+10)(8n-8)=80(n+1)(n-1)$$ 2 BODA

Kako je n prost broj veći od 3, onda je n neparan pa su $n+1$ i $n-1$ parni brojevi. 2 BODA

Dakle, $n-1$ i $n+1$ su uzastopni parni brojevi. To znači da je jedan od njih djeljiv s 4, a drugi s 2.

2 BODA

Također, $n-1$, n, $n+1$ su tri uzastopna prirodna broja te jedan od njih mora biti djeljiv s 3. S obzirom da je n prost broj veći od 3, jedan od brojeva $n-1$ ili $n+1$ je djeljiv s 3. 2 BODA

Na kraju je $(9n+1)^2-(n+9)^2=80\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot m=1920\cdot m$ za $m\in\mathbb{N}$ pa je time tvrdnja dokazana. 2 BODA

………………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Trokuti ASB i ASC su međusobno sukladni pravokutni trokuti (imaju zajedničku stranicu $\overline{AS}$, $|SB| = |SC| = r$, $|\sphericalangle ABS|=|\sphericalangle ACS|=90°$), pa je $|\sphericalangle BAS|=|\sphericalangle CAS|=30°$ i $|\sphericalangle BSA|=|\sphericalangle CSA|=60°$. 2 BODA

Pravokutni trokut s kutovima veličine 30° i 60° možemo nadopuniti na jednakostranični trokut, tj. u takvom je trokutu hipotenuza dvostruko dulja od kraće katete. Prema tome je

$|SB| = |SC| = \frac{1}{2}|AS| = 3$ cm. 2 BODA

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ASB dobivamo da je $|AB|^2 = |AS|^2 - |SB|^2$, tj.

$|AB|^2 = 36 - 9$, odakle je $|AB| = \sqrt{27}=3\sqrt{3}$ cm. 1 BOD

Površina četverokuta $ACSB$ je dvostruko veća od površine pravokutnog trokuta ASB, tj.

$P_{\square ACSB} = 2\cdot\frac{1}{2}|AB|\cdot|BS|=3\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$ cm^2. 2 BODA

Površinu osjenčanog lika dobivamo tako da od površine četverokuta $ACSB$ oduzmemo površinu P_1 kružnog isječka kružnice polumjera 3 cm kojemu odgovara središnji kut veličine 120°.

Dakle, $P_1=\frac{1}{3}r^2\pi=3\pi$. 2 BODA

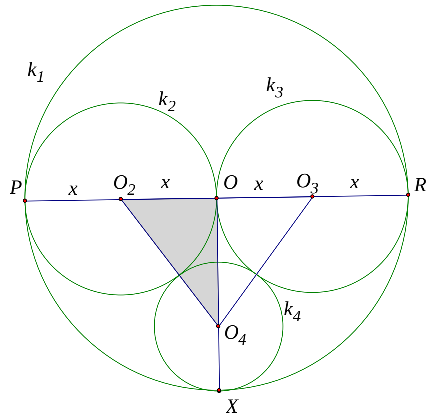
Površina osjenčanog lika je $(9\sqrt{3}-3\pi)$ cm^2. 1 BOD

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je $x = |PO_2| = |O_2O| = |OO_3| = |O_3R|$

Tada je $|O_2O_4| = x + 18$. 1 BOD

Uočimo pravokutan trokut O_4OO_2. Primjenom Pitagorina poučka slijedi



1 BOD

$$|O_2O_4|^2 = |O_2O|^2 + |OO_4|^2$$
$$(x+18)^2 = x^2 + (2x-18)^2$$
2 BODA

$$4x^2 - 108x = 0$$
$$4x(x-27) = 0$$
2 BODA

Dakle, $x_1 = 0$ što nije moguće i 1 BOD

$x_2 = 27$. 1 BOD

Na kraju $|PR| = 4x = 108$ cm. 2 BODA

…………………………………………………………………..…………… UKUPNO 10 BODOVA