ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je $a \leqslant b \leqslant c$. Dokaži da vrijedi

$$c^2 - b^2 + a^2 \geqslant (c - b + a)^2.$$

Prvo rješenje.

Sređivanjem izraza dobivamo ekvivalentne tvrdnje:

$$c^2 - (c - b + a)^2 + a^2 - b^2 \geqslant 0,$$

$$(b - a)(2c - b + a) + (a - b)(a + b) \geqslant 0, \qquad \text{3 boda}$$

$$(b - a)(2c - b + a - a - b) \geqslant 0,$$

$$2(b - a)(c - b) \geqslant 0. \qquad \text{5 bodova}$$

Zadnja tvrdnja je točna jer je $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, pa vrijedi i tvrdnja zadatka. 2 boda

Drugo rješenje.

Pokazat ćemo da vrijedi $c^2 - b^2 + a^2 - (c - b + a)^2 \geqslant 0$.

Kvadriranjem i faktoriziranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
c^2 - b^2 + a^2 - (c - b + a)^2 &= c^2 + a^2 - b^2 - c^2 - b^2 - a^2 + 2bc - 2ac + 2ab \\
&= 2bc - 2ac + 2ab - 2b^2 \\
&= 2c(b - a) + 2b(a - b) && \text{3 boda} \\
&= 2(b - a)(c - b) \geqslant 0. && \text{5 bodova}
\end{aligned}$$

Zadnja tvrdnja je točna jer je $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, pa vrijedi i tvrdnja zadatka. 2 boda

Zadatak A-1.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^4 + 68 = 4y^4.$$

Prvo rješenje.

Zadanu jednadžbu možemo zapisati kao $68 = 4y^4 - x^4$, tj. $68 = (2y^2 - x^2)(2y^2 + x^2)$. 1 bod

Budući da je $2y^2+x^2$ nenegativan broj i $2y^2-x^2$ mora biti nenegativan, pa zaključujemo da su $2y^2 + x^2$ i $2y^2 - x^2$ prirodni djelitelji broja $68 = 2^2 \cdot 17$. 2 boda

Djelitelji broja 68 su 1, 2, 4, 17, 34 i 68.

Budući da je $2y^2 - x^2 \leqslant 2y^2 + x^2$, postoje samo tri mogućnosti. 1 bod

i) Ako pretpostavimo da je $2y^2 - x^2 = 1$ i $2y^2 + x^2 = 68$, onda bi moralo vrijediti $4y^2 = 69$, što je nemoguće jer 4 ne dijeli 69. 1 bod

ii) Ako pretpostavimo da je $2y^2-x^2 = 2$, $2y^2+x^2 = 34$, onda mora vrijediti $4y^2 = 36$. Dakle, $y \in \{3, -3\}$, pa vrijedi $x^2 = 16$, tj. $x \in \{4, -4\}$. 3 boda

iii) Ako pretpostavimo da je $2y^2 - x^2 = 4$ i $2y^2 + x^2 = 17$, onda bi moralo vrijediti $4y^2 = 21$, što je nemoguće jer 4 ne dijeli 21. 1 bod

Jedina rješenja su stoga $(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $68 = (2y^2 - x^2)(2y^2 + x^2)$ i da su $2y^2 + x^2$ i $2y^2 - x^2$ prirodni djelitelji broja 68. 3 boda

Zbroj brojeva $2y^2-x^2$ i $2y^2+x^2$ je paran broj (jednak je $4y^2$), što znači da su ti brojevi iste parnosti. 3 boda

Budući da je $2y^2 - x^2 \leqslant 2y^2 + x^2$, jedina mogućnost je $2y^2 - x^2 = 2, \quad 2y^2 + x^2 = 34$. 2 boda

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $y^2 = 9$ i $x^2 = 16$. 1 bod

Jedina rješenja su $(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$. 1 bod

Zadatak A-1.3.

Postoje li realni brojevi x, y, z takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -5 \qquad \text{i} \qquad \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 8\,?$$

Rješenje.

Pretpostavimo da takvi realni x, y, z postoje. Tada je

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)^2 &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y} + \frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z} + \frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\right) && \text{2 boda}\\ &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) && \text{3 boda}\\ &= 8 + 2\cdot(-5) = -2 < 0, && \text{2 boda}\end{aligned}$$

što je nemoguće jer su kvadrati realnih brojeva nenegativni. Dakle, ne postoje takvi realni x, y, z. 3 boda

Napomena: Učenik koji umjesto izraza $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$ kvadrira izraz $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ i ne napravi značajniji pomak u rješavanju zadatka treba dobiti 1 bod.

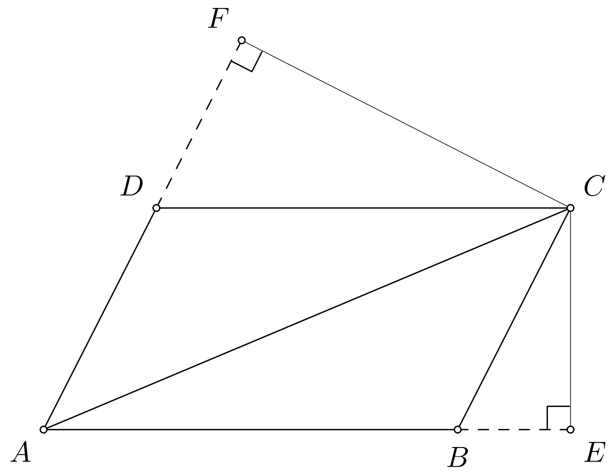
Zadatak A-1.4.

Neka je $ABCD$ paralelogram sa šiljastim kutom u vrhu A. Neka je E nožište okomice iz točke C na pravac AB te neka je F nožište okomice iz točke C na pravac AD.

Dokaži da vrijedi

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2.$$

Prvo rješenje.



Primjenom Pitagorinog teorema na trokut BEC dobivamo $|CE|^2 = |BC|^2 - |BE|^2$, a na trokut AEC dobivamo $|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2$. 1 bod

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo $|AC|^2 = |AE|^2 + |BC|^2 - |BE|^2$, 1 bod
a primjenom formule za razliku kvadrata slijedi

$$|AC|^2 = (|AE| - |BE|) \cdot (|AE| + |BE|) + |BC|^2.$$

Primijetimo da je $|AE| - |BE| = |AB|$ i $|AE| + |BE| = |AB| + 2|BE|$.

Zato je $|AC|^2 = |AB|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BE| + |BC|^2$. 2 boda

Analogno dobivamo $|AC|^2 = |AD|^2 + 2 \cdot |AD| \cdot |DF| + |DC|^2$. 1 bod

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$2|AC|^2 = |AB|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BE| + |AD|^2 + 2 \cdot |AD| \cdot |DF| + |BC|^2 + |DC|^2.$$ 3 boda

Budući da je $|BC| = |AD|$ i $|DC| = |AB|$, slijedi

$$2|AC|^2 = 2|AB|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BE| + 2|AD|^2 + 2 \cdot |AD| \cdot |DF|,$$ 1 bod

pa nakon dijeljenja s 2 i faktorizacije dobivamo

$$|AC|^2 = |AE| \cdot |AB| + |AF| \cdot |AD|.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|BE| = x$, $|DF| = y$.

Dvostrukom primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2 = (|AB| + |BE|)^2 + (|BC|^2 - |BE|^2) = (a + x)^2 + (b^2 - x^2),$$ 2 boda

Jednakost koju treba dokazati možemo napisati kao

$$a(a + x) + b(b + y) = (a + x)^2 + (b^2 - x^2),$$ 1 bod

što možemo pojednostaviti na sljedeći način

$$a^2 + ax + b^2 + by = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2,$$

pa je dovoljno pokazati

$$by = ax.$$ 2 boda

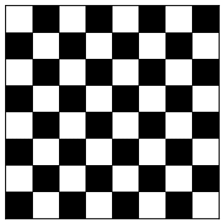
Primijetimo da su trokuti BEC i DFC slični. Naime, $\sphericalangle CEB = \sphericalangle CFD = 90°$,

a $\sphericalangle CDF = \sphericalangle EBC$ (kutovi s paralelnim kracima). 3 boda

Iz te sličnosti slijedi da je $\dfrac{|CB|}{|BE|} = \dfrac{|CD|}{|DF|}$, tj. $\dfrac{b}{x} = \dfrac{a}{y}$, pa slijedi tražena jednakost. 2 boda

Zadatak A-1.5.

Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča na slici. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?



Rješenje.

To nije moguće postići.

U svakom potezu ćemo promijeniti boju na točno 8 polja. Ako je k od tih polja crno, onda je $8 - k$ od tih polja bijelo. Označimo sa C ukupan broj crnih polja prije nekog poteza.

Nakon tog poteza će ukupan broj crnih polja biti $C - k + (8 - k) = C + 8 - 2k$. 3 boda

Zaključujemo da će parnost ukupnog broja crnih polja uvijek biti ista. 4 boda

Budući da je na početku ukupan broj crnih polja jednak 32, što je paran broj, nemoguće je da nakon bilo kojeg broja poteza broj crnih polja bude 1. 3 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Neka je n prirodni broj i neka je S zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do n.

Dokaži da broj S ne može biti za 1 manji od višekratnika broja 3.

Prvo rješenje.

Ako je n djeljiv s 3, tj. $n = 3k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda je zbroj prvih n prirodnih brojeva

$$S = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \cdots + ((3k - 2) + (3k - 1) + 3k)$$

djeljiv s 3 jer je zbroj u svakoj zagradi djeljiv s 3. 3 boda

Slično, ako je $n = 3k + 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda zbroj

$$S = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \cdots + ((3k - 2) + (3k - 1) + 3k) + (3k + 1)$$

daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. 3 boda

Ako je $n = 3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda je zbroj

$$S = (1 + 2 + 3) + (4 + 5 + 6) + \cdots + ((3k - 2) + (3k - 1) + 3k) + (3k + 1) + (3k + 2)$$

također djeljiv s 3. 3 boda

Ni u jednom slučaju $S + 1$ nije višekratnik broja 3. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $S = 1 + 2 + \cdots + n$. Tada je

$$\begin{aligned} 2S = 1+ \quad & 2 + \cdots \quad +n \\ +n+ \quad & (n-1) + \cdots \quad +1 = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1). \end{aligned}$$

Zato je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 2 boda

Ako je n ili $n + 1$ djeljiv s 3, onda je i S djeljiv s 3, pa $S + 1$ nije višekratnik broja 3. 3 boda

U suprotnom je $n + 2$ djeljiv s 3, tj. n je oblika $3k - 2$ za neki prirodan broj k. Tada je

$$S = \frac{(3k - 2)(3k - 1)}{2} = \frac{9k^2 - 9k + 2}{2} = \frac{9k(k - 1)}{2} + 1.$$ 3 boda

Budući da je $\dfrac{3k(k-1)}{2}$ cijeli broj, slijedi da u ovom slučaju $S + 1$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. nije višekratnik broja 3. 2 boda

Napomena: Ako učenik napiše formulu $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ bez dokaza također treba dobiti 2 boda za tu tvrdnju.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je

$$\frac{\overline{z}}{z}+\frac{z}{\overline{z}}$$

prirodni broj.

Prvo rješenje.

Primijetimo da promatrani izraz ima smisla samo za $z \neq 0$.

Uvrstimo li $z=x+yi$, pri čemu su $x, y \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z}}{z}+\frac{z}{\overline{z}} &= \frac{x-yi}{x+yi}+\frac{x+yi}{x-yi}=\frac{(x-yi)^{2}+(x+yi)^{2}}{(x+yi)(x-yi)} \\
&= \frac{x^{2}-2xyi-y^{2}+x^{2}+2xyi-y^{2}}{x^{2}+y^{2}} \\
&= \frac{2\left(x^{2}-y^{2}\right)}{x^{2}+y^{2}} \qquad \text{2 boda}\\
&= \frac{2\left(x^{2}+y^{2}\right)-4y^{2}}{x^{2}+y^{2}}=2-\frac{4y^{2}}{x^{2}+y^{2}}. \qquad \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Da bi ovaj izraz bio prirodan broj, vrijednost izraza $\dfrac{4y^{2}}{x^{2}+y^{2}}$ mora biti 0 ili 1. 2 boda

U prvom slučaju je $y=0$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 bod

U drugom slučaju je $x^{2}+y^{2}=4y^{2}$, tj. $x= \pm y\sqrt{3}$, $x \neq 0$. 2 boda

Konačno rješenje je $z \in \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \left\{x\left(\pm\sqrt{3}+i\right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, za $z=x+yi \neq 0$ dobivamo $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{2\left(x^{2}-y^{2}\right)}{x^{2}+y^{2}}$. 2 boda

Pretpostavimo da je taj izraz jednak prirodnom broju k.

Tada je $2(x^{2}-y^{2})=k(x^{2}+y^{2})$, tj. $(2-k)x^{2}=(2+k)y^{2}$. 1 bod

Ako je $k=2$, onda je $y=0$ i $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 bod

Ako je $k \neq 2$, onda mora biti $y \neq 0$ i možemo pisati $\dfrac{x^{2}}{y^{2}}=\dfrac{4}{2-k}-1$. 2 boda

Budući da je $\dfrac{x^{2}}{y^{2}} \geqslant 0$ slijedi da je $\dfrac{4}{2-k} \geqslant 1$, pa je $2-k>0$.

Kako je k prirodan broj, mora vrijediti $k=1$. 2 boda

U tom slučaju je $2(x^{2}-y^{2})=x^{2}+y^{2}$, tj. $x^{2}=3y^{2}$.

Konačno rješenje je $z \in \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \left\{x\left(\pm\sqrt{3}+i\right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$. 2 boda

Zadatak A-2.3.

Dani su pozitivni realni brojevi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 za koje vrijedi $b_1^2 \leqslant 4a_1c_1$ i $b_2^2 \leqslant 4a_2c_2$. Dokaži da vrijedi

$$4(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 1) > (b_1 + b_2 + 2)^2.$$

Prvo rješenje.

Zbog $b_1^2 \leqslant 4a_1c_1$, kvadratna funkcija $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ima najviše jednu realnu nultočku (jer je diskriminanta $D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \leqslant 0$). 2 boda

Zbog $a_1 > 0$ imamo $f_1(x) \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. 2 boda

Analogno, promatrajući $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ dobivamo $f_2(x) \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. 1 bod

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi da je $f_3(x) = 5x^2 + 2x + 1 > 0$ (diskriminanta je $D_3 = -16 < 0$). 2 boda

Zbrajanjem dobivamo $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) > 0$, tj.

$$(a_1 + a_2 + 5)x^2 + (b_1 + b_2 + 2)x + c_1 + c_2 + 1 > 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. 1 bod

Zato je diskriminanta ove kvadratne funkcije negativna tj. vrijedi

$$(b_1 + b_2 + 2)^2 - 4(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 1) < 0,$$

iz čega slijedi tvrdnja zadatka. 2 boda

Drugo rješenje.

Nejednakost koju želimo pokazati ekvivalentna je nejednakosti

$$4a_1c_1+4a_2c_2+4a_1c_2+4a_2c_1+4a_1+4a_2+20c_1+20c_2+16 > b_1^2+b_2^2+4b_1+4b_2+2b_1b_2 \quad (1)$$ 1 bod

Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$4a_1c_1 \geqslant b_1^2, \quad (2)$$
$$4a_2c_2 \geqslant b_2^2. \quad (3)$$

Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo

$$4a_1 + 4c_1 \geqslant 4 \cdot 2\sqrt{a_1c_1} \geqslant 4b_1, \quad (4)$$
$$4a_2 + 4c_2 \geqslant 4 \cdot 2\sqrt{a_2c_2} \geqslant 4b_2. \quad (5)$$ 2 boda

Još jednom primjenom A–G nejednakosti dobivamo

$$a_2c_1 + a_1c_2 \geqslant 2\sqrt{a_2c_1a_1c_2} = 2\sqrt{a_1c_1}\sqrt{a_2c_2} \geqslant \frac{b_1b_2}{2},$$

pa je

$$4(a_2c_1 + a_1c_2) \geqslant 2b_1b_2. \quad (6)$$ 2 boda

Zbog pozitivnosti brojeva vrijedi i

$$16c_1 + 16c_2 + 16 > 0. \quad (7)$$ 1 bod

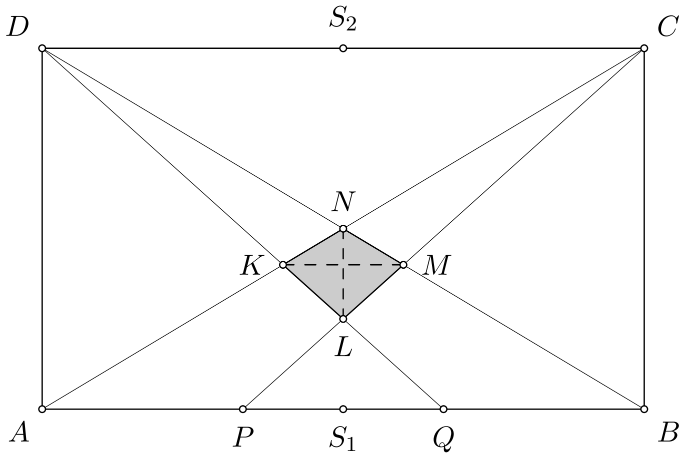
Zbrajanjem nejednakosti (2) do (7) dobivamo da vrijedi nejednakost (1), pa vrijedi i nejednakost u zadatku. 4 boda

Zadatak A-2.4.

Točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ tako da vrijedi $|AP| = |PQ| = |QB|$. Pravac DQ siječe pravce AC i CP redom u točkama K i L, a pravac DB siječe pravce AC i CP redom u točkama N i M.

Odredi omjer površina četverokuta $KLMN$ i pravokutnika $ABCD$.

Rješenje.



Neka je $a = |AB|$ i $b = |BC|$.

Zbog simetrije je $KM \parallel AB$ i $LN \parallel BC$, odnosno $KM \perp LN$ pa je

$$P(KLMN) = \frac{1}{2}|KM| \cdot |LN|.$$ 2 boda

Prema KKK-poučku, trokuti PQL i CDL su slični i koeficijent sličnosti je $\dfrac{|PQ|}{|CD|} = \dfrac{1}{3}$. 1 bod

Označimo li sa S_1 i S_2 polovišta dužina $\overline{AB}$ (i $\overline{PQ}$) i $\overline{CD}$, vrijedi $|S_1L| = \frac{1}{4}|S_1S_2|$. 1 bod

Budući da je N polovište dužine $\overline{S_1S_2}$, vrijedi $|NL| = \frac{1}{4}|S_1S_2| = \frac{1}{4}b$. 1 bod

Prema KKK-poučku, trokuti AQK i CDK su slični i koeficijent sličnosti je $\dfrac{|AQ|}{|CD|} = \dfrac{2}{3}$. 1 bod

Zato je omjer duljina visina iz vrha K u trokutima AQK i CDK je jednak $2 : 3$, pa je duljina visine iz vrha K u trokutu CDK jednaka $\dfrac{3}{5}b$. 1 bod

Također prema KKK-poučku, trokuti CKM i CAP su slični, a koeficijent sličnosti je jednak omjeru duljina njihovih visina, odnosno $3 : 5$. 1 bod

Zato je $|KM| = \dfrac{3}{5}|AP| = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{a}{3} = \dfrac{1}{5}a$. 1 bod

Iz svega slijedi

$$P(KLMN) = \frac{1}{2}|KM| \cdot |LN| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{b}{4} = \frac{1}{40}P(ABCD).$$ 1 bod

Zadatak A-2.5.

U svaki vrh pravilnog 50-erokuta je upisan ili broj 1 ili broj 2. Ni za koja tri uzastopna vrha upisani brojevi nisu jednaki, a ukupno je dvadeset puta upisan broj 1 i trideset puta upisan broj 2. Za svaki vrh izračunamo umnožak broja u tom vrhu s brojevima u dvama susjednim vrhovima, a zatim zbrojimo sve takve umnoške.

Dokaži da rezultat ne ovisi o rasporedu brojeva 1 i 2 te odredi taj rezultat.

Prvo rješenje.

Budući da nikoja tri uzastopna broja nisu jednaka, svaki umnožak se sastoji od dvije jedinice i jedne dvojke ili od dvije dvojke i jedne jedinice. 2 boda

Trojke s dvije jedinice i jednom dvojkom imaju umnožak jednak 2. Označimo broj takvih trojki s x. Trojke s jednom jedinicom i dvije dvojke imaju umnožak jednak 4. Označimo broj takvih trojki s y.

U x trojki ima po dvije jedinice, a u y trojki po jedna. U svim trojkama stoga ima $2x+y$ jedinica, a pritom smo svaku jedinicu brojali 3 puta, pa je $2x+y=3\cdot 20=60$. 2 boda

U x trojki ima po jedna dvojka, a u y trojki po dvije. U svim trojkama stoga ima $x+2y$ dvojki, a pritom smo svaku od njih brojali 3 puta, pa je $x+2y=3\cdot 30=90$. 2 boda

Dakle, dobili smo linearni sustav

$$\begin{aligned} 2x+y&=60\\ x+2y&=90. \end{aligned}$$

Rješavanjem dobivamo $x=10$ i $y=40$. 2 boda

Stoga je ukupni zbroj umnožaka po tri uzastopna broja jednak

$$2x+4y=2\cdot 10+4\cdot 40=180.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju uočimo da će svaki umnožak biti oblika $1\cdot 1\cdot 2$ ili $1\cdot 2\cdot 2$. 2 boda

Primijetimo da je

$$1\cdot 1\cdot 2=2\cdot(1+1+2)-6, \quad 1\cdot 2\cdot 2=2\cdot(1+2+2)-6,$$

tj. za svaku trojku uzastopnih brojeva x, y, z vrijedi

$$xyz=2(x+y+z)-6.$$ 3 boda

Zato je zbroj svih umnožaka jednak dvostrukom zbroju svih zbrojeva od po tri uzastopna broja umanjenom za $50\cdot 6$. 2 boda

Budući da se svaki broj pojavljuje u točno tri trojke uzastopnih brojeva, zbroj svih zbrojeva od po tri uzastopna broja je jednak trostrukom zbroju svih brojeva. 2 boda

Zato je traženi broj jednak $2\cdot 3\cdot(20\cdot 1+30\cdot 2)-6\cdot 50=480-300=180$. 1 bod

Napomena: Ako učenik napiše jedan primjer rasporeda jedinica i dvojki tražen u zadatku (npr. 12212 12212 ... 12212) i na temelju toga izračuna da je traženi rezultat 180 treba dobiti 2 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da vrijede jednakosti

$$
\begin{aligned}
2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d &= 0,\\
2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d &= 0.
\end{aligned}
$$

Ako je $\cos(b+c) \neq 0$, odredi vrijednost izraza $\dfrac{\cos(a+d)}{\cos(b+c)}$.

Rješenje.

Zapišimo dane jednakosti u obliku

$$
\begin{aligned}
2\cos a + 9\cos d &= -6\cos b - 7\cos c,\\
2\sin a - 9\sin d &= 6\sin b - 7\sin c
\end{aligned}
$$

i kvadrirajmo ih. Dobit ćemo

$$
\begin{aligned}
4\cos^2 a + 36\cos a\cos d + 81\cos^2 d &= 36\cos^2 b + 84\cos b\cos c + 49\cos^2 c,\\
4\sin^2 a - 36\sin a\sin d + 81\sin^2 d &= 36\sin^2 b - 84\sin b\sin c + 49\sin^2 c.
\end{aligned}
$$

3 boda

Zbrajanjem i korištenjem identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (za $x = a, b, c, d$) dobivamo

$$4 + 81 + 36(\cos a\cos d - \sin a\sin d) = 36 + 49 + 84(\cos b\cos c - \sin b\sin c),$$

$$3(\cos a\cos d - \sin a\sin d) = 7(\cos b\cos c - \sin b\sin c),$$

4 boda

što primjenom adicijskih formula za kosinus prelazi u

$$3\cos(a+d) = 7\cos(b+c), \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\cos(a+d)}{\cos(b+c)} = \frac{7}{3}.$$

3 boda

Zadatak A-3.2.

Dan je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kojem su duljine bridova $|AB| = |AD| = a$ i $|AA_1| = 2a$. Neka su A', B', C' i D' redom polovišta bridova $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ i $\overline{DD_1}$.

Odredi obujam tijela nastalog presjekom kocke $ABCDA'B'C'D'$ i piramide $A_1A'B'B_1D$.

Rješenje.

Traženi presjek je četverostrana piramida s vrhom D i osnovkom u ravnini $A'B'C'D'$.

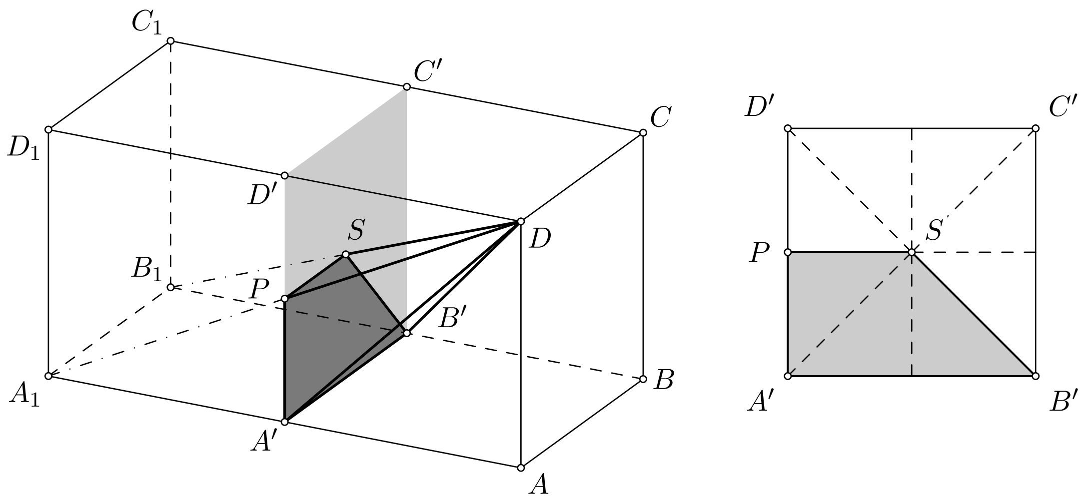
Vrhovi njene osnovke su točke u kojima dužine $\overline{A_1D}$, $\overline{A'D}$, $\overline{B'D}$ i $\overline{B_1D}$ sijeku tu ravninu. 2 boda

Dva vrha osnovke su upravo točke A' i B'. Neka su P i S redom točke u kojima $\overline{DA_1}$ i $\overline{DB_1}$ sijeku tu ravninu.

Kako je $\overline{DA_1}$ dijagonala strane AA_1D_1D polaznog kvadra, točka P je središte te strane i ujedno polovište dužine $\overline{A'D'}$. 1 bod

Kako je $\overline{DB_1}$ prostorna dijagonala danog kvadra, točka S je njegovo središte, i ujedno središte kvadrata $A'B'C'D'$. 1 bod

Treba odrediti obujam četverostrane piramide $A'B'SPD$ čija je osnovka trapez $A'B'SP$, a visina dužina $\overline{DD'}$. 1 bod



Vrijedi

$$P(A'B'SP) = \frac{1}{2}\left(|A'B'| + |SP|\right) \cdot |PA'| = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$ 3 boda

Sada možemo izračunati traženi obujam

$$V(A'B'SPD) = \frac{1}{3}P(A'B'SP) \cdot |DD'| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot a = \frac{a^3}{8}.$$ 2 boda

Napomena: Kvadrat $A'B'C'D'$ možemo podijeliti na 8 sukladnih pravokutnih trokuta od kojih tri čine promatrani trapez $A'B'SP$. Tako na još jedan način vidimo da je površina tog trapeza $\frac{3}{8}a^2$.

Zadatak A-3.3.

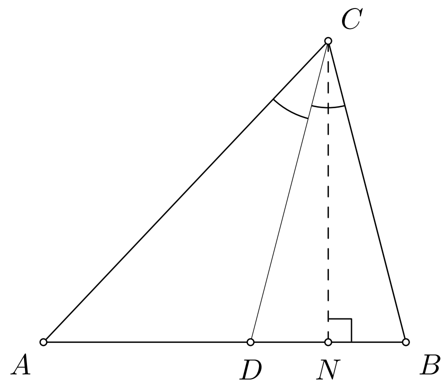
U trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D.

Ako je $|CB| = |CD|$, $|AD| = 4$ i $|DB| = 3$, odredi $|AC|$.

Prvo rješenje.

Prema teoremu o simetrali kuta vrijedi $|AC| : |BC| = 4 : 3$. 2 boda

Zato možemo pisati $|AC| = 4x$, $|BC| = 3x$.



Neka je N nožište visine trokuta ABC iz vrha C. Tada primjenom Pitagorinog poučka na trokute ANC i BNC dobivamo

$$|AC|^2 = |AN|^2 + |CN|^2,$$ 1 bod

$$|BC|^2 = |BN|^2 + |CN|^2.$$ 1 bod

Oduzimanjem ovih jednakosti slijedi

$$|AC|^2 - |BC|^2 = |AN|^2 - |BN|^2.$$ 1 bod

Budući da je BCD jednakokračan trokut, a $\overline{CN}$ visina u tom trokutu, slijedi da je $|DN| = |BN| = \frac{3}{2}$. 2 boda

Nadalje, $|AN| = |AD| + |DN| = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo $(4x)^2 - (3x)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 28$, 1 bod

odakle zaključujemo da je $x = 2$ i $|AC| = 4x = 8$. 1 bod

Napomena: Umjesto primjenom Pitagorinog poučka, nakon zaključka $|AC| = 4x$ i $|BC| = 3x$, učenici mogu dobiti ekvivalentnu jednadžbu za x primjenom Stewartovog poučka prema kojem vrijedi

$$|BC|^2 \cdot |AD| + |AC|^2 \cdot |BD| = |AB| \cdot (|CD|^2 + |AD| \cdot |BD|).$$

Uvrštavanjem dobivamo $(3x)^2 \cdot 4 + (4x)^2 \cdot 3 = 7 \cdot ((3x)^2 + 3 \cdot 4)$, što se svodi na $x^2 = 4$, tj. $x = 2$.

Drugo rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Primjenom poučka o sinusima na $\triangle ABC$ dobivamo $\dfrac{|BC|}{\sin\alpha} = \dfrac{|AB|}{\sin\gamma}$,

a primjenom poučka o sinusima na $\triangle ACD$ dobivamo $\dfrac{|CD|}{\sin\alpha} = \dfrac{|AD|}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Budući da je $|BC| = |CD|$, dobivamo $\dfrac{|AB|}{\sin\gamma} = \dfrac{|AD|}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. 3 boda

Zbog formule $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ slijedi $|AB| = 2|AD|\cos\dfrac{\gamma}{2}$. 2 boda

Uvrštavanjem $|AD| = 4$ i $|AB| = |AD| + |DB| = 7$ slijedi $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{7}{8}$.

Iz toga sad lako izračunamo $\cos\gamma = 2\cos^2\dfrac{\gamma}{2} - 1 = \dfrac{17}{32}$. 1 bod

Nadalje, primjenom sinusovog poučka na trokute ADC i BCD slijedi

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sin\sphericalangle ADC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\sphericalangle BDC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{|BC|}{|BD|},$$

tj. $|AC| : |BC| = |AD| : |BD| = 4 : 3$. 2 boda

Zato možemo pisati $|AC| = 4x$, $|BC| = 3x$.

Prema poučku o kosinusu u trokutu ABC vrijedi

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC|\cos\gamma,$$

pa dobivamo

$$7^2 = (4x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3x \cdot \frac{17}{32}.$$

Slijedi $x^2 = 4$, tj. $x = 2$, pa je $|AC| = 4x = 8$. 2 boda

Treće rješenje.

Neka je točka E na polupravcu CD takva da je $|CE| = |CA|$. 1 bod

Tada je $\sphericalangle AEC = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACE)$.

Budući da je CD simetrala kuta $\sphericalangle ACD$ kutovi $\sphericalangle ACE$ i $\sphericalangle DCB$ su jednaki, pa je

$$\sphericalangle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DCB) = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADE.$$

Dakle, i trokut AED je jednakokračan i vrijedi $|AE| = |AD| = 4$. 2 boda

Uočimo da su sva tri trokuta AED, AEC i DBC jednakokračna i imaju iste kutove uz osnovicu, pa su svaka dva od njih međusobno slična. 2 boda

Zbog sličnosti trokuta AEC i DBC je $|CD| : |CE| = |BD| : |AE| = 3 : 4$. 1 bod

Zato je

$$\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|CE|} = \frac{|CE| - |CD|}{|CE|} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$ 2 boda

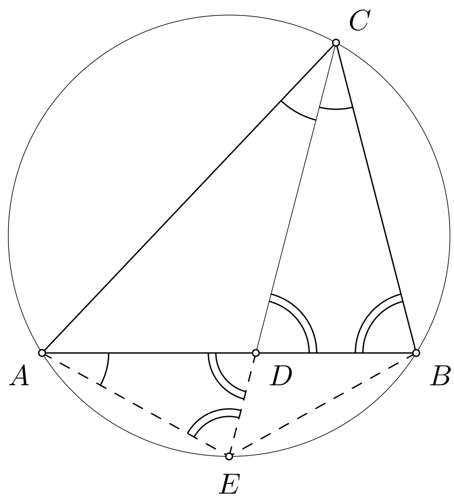
Zbog sličnosti trokuta EDA i AEC zaključujemo $\dfrac{|AC|}{|AE|} = \dfrac{|AE|}{|DE|}$. 1 bod

Konačno, $16 = |AE|^2 = |AC| \cdot |DE| = |AC|^2 \cdot \dfrac{|DE|}{|AC|} = \dfrac{|AC|^2}{4}$, pa je $|AC| = 8$. 1 bod

Četvrto rješenje.

Kao u prethodnom rješenju uvedemo točku E i pokažemo da je $|AE| = 4$. 3 boda

Također vrijedi $\sphericalangle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DCB) = \sphericalangle CBD$, pa je $AEBC$ tetivan četverokut. 1 bod



Budući da su nad tetivama $\overline{AE}$ i $\overline{BE}$ jednaki obodni kutovi, zaključujemo da je

$$|BE| = |AE| = 4.$$ 1 bod

Prema Ptolomejevom poučku vrijedi

$$|AC| \cdot |BE| + |BC| \cdot |AE| = |AB| \cdot |CE|.$$

Budući da je $|BE| = |AE| = 4$, $|AB| = 7$ i $|CE| = |AC|$ slijedi $4 \cdot |BE| + 4 \cdot |BC| = 7 \cdot |AC|$, tj. $4|BC| = 3|AC|$. 2 boda

Prema poučku o potenciji točke primijenjenom na točku D obzirom na kružnicu opisanu četverokutu $ABCD$ vrijedi $|CD| \cdot |DE| = |AD| \cdot |BD| = 3 \cdot 4 = 12$. 2 boda

Budući da je $|BC| = |CD|$ i $|DE| = |CE| - |CD| = |AC| - |BC|$ slijedi

$$|BC| \cdot (|AC| - |BC|) = 12,$$

pa uvrštavanjem $|BC| = \dfrac{3|AC|}{4}$ dobivamo $\dfrac{3|AC|}{4} \cdot \dfrac{|AC|}{4} = 12$, tj. $|AC| = 8$. 1 bod

Zadatak A-3.4.

Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodni broj n takav da su brojevi $n^2 + 3$ i $(n+1)^2 + 3$ djeljivi s p.

Rješenje.

Budući da p dijeli n^2+3 i n^2+2n+4, slijedi da p dijeli i njihovu razliku

$$(n^2+2n+4)-(n^2+3)=2n+1. \qquad \text{2 boda}$$

Zato p dijeli i $(2n+1)^2$, a iz uvjeta da p dijeli n^2+3 slijedi da p dijeli $4(n^2+3)$.

Oduzimanjem zaključujemo da p dijeli $(2n+1)^2-4(n^2+3)=4n-11$. 4 boda

Budući da p dijeli $2n+1$ i $4n-11$, slijedi da p dijeli $2\cdot(2n+1)-(4n-11)=13$, pa je $p=13$ jedini mogući prost broj koji zadovoljava uvjete zadatka. 3 boda

Preostaje samo provjeriti da za $p=13$ postoji odgovarajući n. Stavimo $2n+1=13$, tj. $n=6$. Tada zaista 13 dijeli $6^2+3=39$ i $7^2+3=52$. 1 bod

Zadatak A-3.5.

U svaki vrh pravilnog dvanaesterokuta $A_1A_2\ldots A_{12}$ upisan je ili broj 1 ili broj -1. Na početku je u vrh A_1 upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1. Dozvoljeno je istovremeno promijeniti predznak brojeva u bilo kojih šest uzastopnih vrhova tog dvanaesterokuta.

Dokaži da ponavljanjem ovog postupka ne možemo postići da u vrh A_2 bude upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1.

Rješenje.

Promotrimo brojeve u vrhovima A_2, A_5, A_8 i A_{11}.

Promjenom predznaka u bilo kojih šest uzastopnih vrhova dvanesterokuta promijenit će se predznak u točno dva od ta četiri vrha. 4 boda

Zato se parnost ukupnog broja pozitivnih brojeva u vrhovima A_2, A_5, A_8 i A_{11} ne mijenja dozvoljenim postupkom. 4 boda

Na početku su u sva ta četiri vrha pozitivni brojevi, pa se dozvoljenim postupkom ne može postići da je u vrhu A_2 broj -1, a u svim ostalim vrhovima broj 1. 2 boda

Napomena: Moguće je promatrati i neke druge četvorke koje sadrže vrh A_2, ne sadrže vrh A_1, a koje imaju svojstvo da se dozvoljenim postupkom mijenja predznak u točno dva od ta četiri vrha, npr. A_2, A_3, A_8 i A_9.

Napomena: Umjesto parnosti ukupnog broja pozitivnih brojeva u promatrana četiri vrha, moguće je promatrati parnost zbroja ili predznak umnoška tih četiriju brojeva.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj i neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokaži da vrijedi

$$a_0 - \binom{n}{1}a_1 + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}a_k + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}a_n = 0.$$

Prvo rješenje.

Za $n = 2$ tvrdnja $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ je ekvivalentna s $a_1 - a_0 = a_2 - a_1$ što vrijedi po definiciji aritmetičkog niza. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.

Tada vrijedi

$$a_0 - \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}a_2 - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}a_n = 0.$$

No, i brojevi a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1} su uzastopni članovi aritmetičkog niza, pa vrijedi i

$$a_1 - \binom{n}{1}a_2 + \binom{n}{2}a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n + (-1)^n\binom{n}{n}a_{n+1} = 0.$$ 3 boda

Oduzimanjem dobivamo

$$a_0 - \left(\tbinom{n}{1} + 1\right)a_1 + \left(\tbinom{n}{2} + \tbinom{n}{1}\right)a_2 - \cdots + (-1)^n\left(\tbinom{n}{n} + \tbinom{n}{n-1}\right)a_n + (-1)^{n+1}\tbinom{n}{n}a_{n+1} = 0,$$

a primjenom formula $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (za $k = 0, 1, \ldots, n$) i $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ slijedi

$$a_0 - \binom{n+1}{1}a_1 + \binom{n+1}{2}a_2 - \cdots + (-1)^n\binom{n+1}{n}a_n + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}a_{n+1} = 0.$$ 4 boda

Time smo dokazali da tvrdnja zadatka vrijedi i za bilo kojih $n + 1$ uzastopnih članova aritmetičkog niza. Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$. 2 boda

Drugo rješenje.

Ako je $a = a_0$ i d razlika danog artimetičkog niza, onda je $a_n = a + nd$ za $n \geqslant 0$.

Tada je

$$
\begin{aligned}
a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} a_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (a + kd) \\
&= a \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + d \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$
2 boda

Prema binomnom teoremu vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$
3 boda

Za binomne koeficijente vrijedi

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$
2 boda

Zato je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} = n(1-1)^{n-1} = 0.$$
3 boda

Time je pokazana tvrdnja zadatka.

Napomena: Formulu $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$ možemo izvesti i tako da deriviramo obje strane jednakosti $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Zaista, deriviranjem po varijabli x dobivamo $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k x^{k-1}$, pa uvrštavanjem vrijednosti $x = -1$ i množenjem sa -1 dobivamo traženi identitet.

Zadatak A-4.2.

Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Koliko iznosi najveća moguća površina četverokuta $ABCD$ kojem su duljine stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|DA| = d$?

Rješenje.

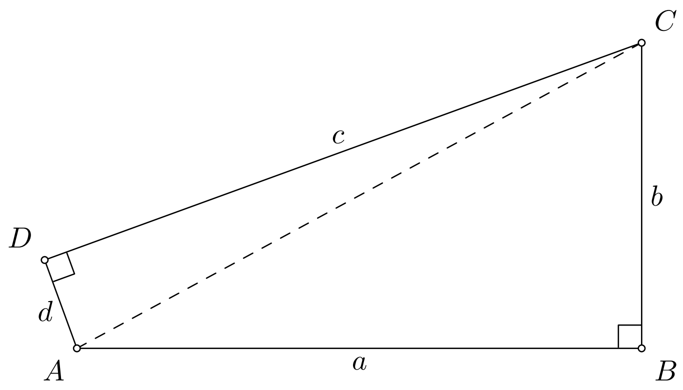
Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli četverokut na dva trokuta ABC i CDA.

Za površinu trokuta ABC vrijedi $P(ABC) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\sphericalangle ABC \leqslant \frac{1}{2}ab$. 2 boda

Analogno zaključujemo da je $P(CDA) \leqslant \frac{1}{2}cd$.

Budući da je $P(ABCD) = P(ABC) + P(CDA)$, time smo pokazali da površina četverokuta $ABCD$ nije veća od $\frac{1}{2}(ab + cd)$. 4 boda

Još trebamo pokazati da postoji četverokut $ABCD$ čija površina je upravo $\frac{1}{2}(ab+cd)$.

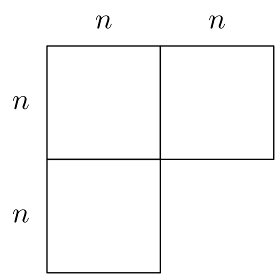


Uočimo četverokut $ABCD$ u kojem je $|AC| = \sqrt{a^2+b^2}$ $(= \sqrt{c^2+d^2})$. Tada su trokuti ABC i CDA pravokutni i površina četverokuta $ABCD$ iznosi $\frac{1}{2}(ab+cd)$. 4 boda

Zadatak A-4.3.

Neka je n prirodni broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 jediničnih kvadratića.

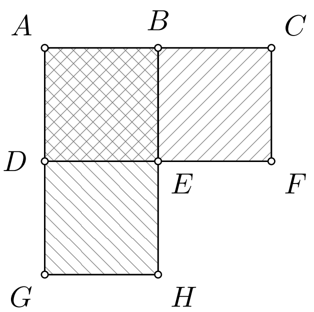
Koliko je ukupno pravokutnika na crtežu nakon podjele na jedinične kvadratiće?

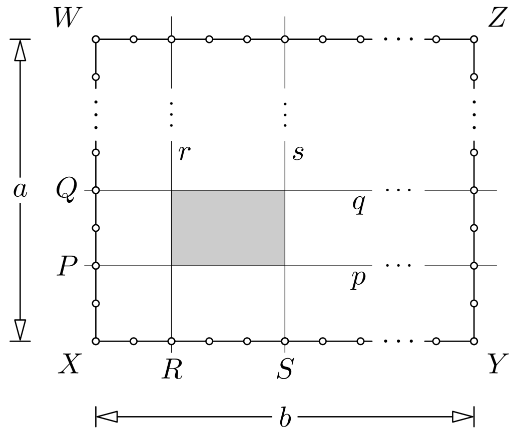


Prvo rješenje.

Označimo s P traženi broj pravokutnika. Ako s $n(XYZW)$ označimo broj pravokutnika u pravokutniku $XYZW$, tada vrijedi:

$$P = n(DFCA) + n(GHBA) - n(DEBA).$$ 3 boda





Preostaje nam odrediti broj pravokutnika u nekom pravokutniku $XYZW$ dimenzija $a \times b$. Primijetimo, svaki pravokutnik je određen odabirom pravaca na kojima leže njegove stranice. Točke P i Q na stranici $\overline{XW}$ danog pravokutnika možemo odabrati na $\binom{a+1}{2}$ načina, a time jednoznačno odaberemo pravce p i q. Na sličan način, točke R i S na stranici $\overline{XY}$, a time i pravce r i s, možemo odabrati na $\binom{b+1}{2}$ načina. Odabrani pravci p, q, r i s omeđuju točno jedan pravokutnik unutar pravokutnika $XYZW$. Zbog toga vrijedi:

$$n(XYZW) = \binom{a+1}{2}\binom{b+1}{2}.$$ 5 bodova

Stoga je

$$n(DFCA) = n(GHBA) = \binom{n+1}{2}\binom{2n+1}{2} \quad \text{i} \quad n(DEBA) = \binom{n+1}{2}^2,$$ 1 bod

pa je

$$P = 2 \cdot \binom{n+1}{2}\binom{2n+1}{2} - \binom{n+1}{2}^2.$$ 1 bod

Napomena: Ukoliko učenik ne izvede formulu za pravokutnik dimenzija $a \times b$, ali točno izračuna traženi broj i obrazloži svoj odgovor treba dobiti sve bodove.

Drugo rješenje.

Ukupni broj pravokutnika na crtežu jednak je zbroju brojeva pravokutnika u svakom od tri $n \times n$ kvadrata, broja pravokutnika u lijevom $2n \times n$ pravokutniku koji nisu sadržani u cijelosti ni u gornjem ni u donjem $n \times n$ kvadratu, te broja pravokutnika u gornjem $n \times 2n$ pravokutniku koji nisu sadržani u cijelosti ni u lijevom ni u desnom $n \times n$ kvadratu. 3 boda

Svaki pravokutnik je određen odabirom pravaca na kojima leže njegove stranice.

Broj načina da odaberemo lijevu i desnu stranicu pravokutnika u kvadratu dimenzija $n \times n$ je $\binom{n+1}{2}$ te je isti broj načina da odaberemo gornju i donju stranicu.

U ovom slučaju je ukupni broj pravokutnika $\binom{n+1}{2}^2$. 3 boda

Za pravokutnik u lijevom $2n \times n$ pravokutniku koji nije sadržan u cijelosti ni u gornjem ni u donjem $n \times n$ kvadratu, možemo na n načina odabrati gornju stranicu, na n načina donju stranicu, a na $\binom{n+1}{2}$ načina lijevu i desnu stranicu.

U ovom slučaju je ukupni broj takvih pravokutnika $n^2 \cdot \binom{n+1}{2}$. 3 boda

Isti rezultat dobivamo za gornji $n \times 2n$ pravokutnik.

Ukupni broj pravokutnika na crtežu je

$$3 \cdot \binom{n+1}{2}^2 + 2n^2 \cdot \binom{n+1}{2}.$$ 1 bod

Napomena: Napišemo li čemu su jednaki binomni koeficijenti i sredimo, dobit ćemo

$$\frac{n^2(n+1)(7n+3)}{4} = \frac{1}{4}(7n^4 + 10n^3 + 3n^2).$$

Zadatak A-4.4.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da vrijedi

$$a! + b! + c! = 2^n.$$

Rješenje.

Zbog simetrije možemo pretpostaviti da je $a \leqslant b \leqslant c$.

Primijetimo da je $a < 3$ jer bi u protivnome brojevi $a!$, $b!$ i $c!$ bili djeljivi s 3, a 2^n nije djeljivo s 3. 1 bod

Razlikujemo slučajeve $a = 1$ i $a = 2$.

(1°) Neka je $a = 1$. Tada bi moralo vrijediti

$$b! + c! = 2^n - 1.$$

Zaključujemo da je $b = 1$, jer bi u protivnome $b!$ i $c!$ bili djeljivi sa 2, a $2^n - 1$ nije djeljivo sa 2. 1 bod

Tada mora vrijediti

$$c! = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1).$$

Vidimo da je $c!$ djeljivo s 2, ali nije djeljivo sa 4, pa su jedine mogućnosti $c = 2$ i $c = 3$. 1 bod

Za $c = 2$ dobije se $n = 2$, a za $c = 3$ dobije se $n = 3$. 1 bod

(2°) Neka je $a = 2$. Tada mora vrijediti

$$b! + c! = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1).$$

Zaključujemo da je $b < 4$, jer bi u protivnome $b!$ i $c!$ bili djeljivi sa 4, a $2(2^{n-1} - 1)$ nije djeljivo sa 4. 1 bod

(2.1°) Neka je $b = 2$. Tada mora vrijediti

$$c! = 2^n - 4 = 4(2^{n-2} - 1).$$

Desna strana jednakosti je djeljiva sa 4, ali nije djeljiva sa 8, a s druge strane broj $c!$ je djeljiv sa 8 čim je djeljiv sa 4 (za $c \geqslant 4$), pa ne postoje takvi n i c. 2 boda

(2.2°) Neka je $b = 3$. Tada mora vrijediti

$$c! = 2^n - 8 = 8(2^{n-3} - 1).$$

Desna strana jednakosti je djeljiva sa 8, ali nije djeljiva sa 16, pa su jedine mogućnosti $c = 4$ i $c = 5$. 1 bod

Za $c = 4$ dobivamo $n = 5$, a za $c = 5$ dobivamo $n = 7$. 2 boda

Dakle, rješenje su brojevi 2, 3, 5 i 7.

Zadatak A-4.5.

Dano je 100 točaka raspoređenih u 10 redaka i 10 stupaca. Svaka točka je crvena ili plava. Točka je u kutu ako je i na kraju stupca i na kraju retka, a na rubu ako se nalazi na kraju stupca ili retka, ali ne oboje. Dvije točke su susjedne ako se nalaze u istom retku ili stupcu, a između njih nema drugih točaka. Svake dvije susjedne točke spojene su dužinom crvene, plave ili zelene boje, tako da svaka crvena dužina spaja dvije crvene točke, svaka plava dužina spaja dvije plave točke, a svaka zelena dužina spaja jednu crvenu i jednu plavu točku. Poznato je da su ukupno 52 točke crvene, od toga ih je 16 na rubu i dvije u kutovima. Također je poznato da ukupno ima 98 zelenih dužina.

Odredi ukupni broj plavih dužina.

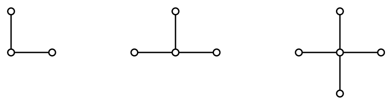
Rješenje.

Označimo s P ukupni broj plavih, a s C ukupni broj crvenih dužina.

Ukupni broj točaka na rubu je 32, pa je broj plavih točaka na rubu 16. Točno dvije plave točke su u kutovima, pa je ukupni broj plavih točaka u unutrašnjosti 30. 2 boda

Prebrojimo sve dužine koje izlaze iz plavih točaka na dva načina.

Iz točaka u kutovima izlaze po dvije, iz točaka na rubu po tri, a iz točaka u unutrašnjosti po četiri dužine. 1 bod



Stoga je ukupni broj dužina koje izlaze iz plavih točaka jednak

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 30 = 172.$$ 2 boda

Iz plave točke mogu izlaziti samo plave i zelene dužine. U ukupnom broju svih dužina koje izlaze iz plavih vrhova zelene dužine smo brojali jednom, a plave dvaput. 2 boda

Zato je $172 = 98 + 2P$, 2 boda

pa je $P = 37$. 1 bod

Ukupni broj plavih dužina je 37.

Napomena: Do rješenja se na sličan način može doći prebrojavanjem svih dužina koje izlaze iz crvenih točaka.

Bodovi koje učenik dobije za ovaj način rješavanja ne mogu se zbrajati s bodovima iz gornjeg rješenja.

Ako učenik pokaže da je ukupni broj dužina 180, te iz toga zaključi da je $P + C = 82$ treba dobiti 2 boda.

Prebrojavanjem svih dužina koje izlaze iz crvenih točaka dobivamo

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 34 = 188 = 98 + 2C,$$

tj. $C = 45$. Ukoliko je obrazložen, ovaj zaključak nosi 8 bodova.