ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$2014 < \sqrt{x} < 2015 \,/^2$ 1 BOD

$2014^2 < x < 2015^2$ 1 BOD

$2015^2 - 2014^2 = (2015 - 2014)(2015 + 2014) = 4029$ 2 BODA

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

$2015^2 - 2014^2 - 1 = 4029 - 1 = 4028$. 2 BODA

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$2014 < \sqrt{x} < 2015 \,/^2$ 1 BOD

$2014^2 < x < 2015^2$ 1 BOD

4 056 196 < x < 4 060 225 2 BODA

Nejednakost zadovoljavaju brojevi 4 056 197, 4 056 198, … ,4 060 224. 1 BOD

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

4 060 224 – 4 056 196 = 4028. 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

Podijelimo li brojnik i nazivnik zadanog izraza s b^2 i uvrstimo da je $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, dobivamo

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b} + 1} =$$ 2 BODA

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$ 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $a = \frac{2}{5} b$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{\left(\frac{2}{5} b\right)^2}{\frac{2}{5} b \cdot b + b^2} = \frac{\frac{4}{25} b^2}{\frac{2}{5} b^2 + b^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{7}{5}b^2} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$ 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $b = \frac{5}{2}a$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{a^2}{a \cdot \frac{5}{2}a + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{a^2}{\frac{5}{2}a^2 + \frac{25}{4}a^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{a^2}{\frac{35}{4}a^2} = \frac{1}{\frac{35}{4}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4}{35}$$ 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Četvrti način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{a^2}{b(a + b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{a + b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} =$$ 2 BODA

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$$ 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Peti način:

Budući da vrijedi $a : b = 2 : 5$, postoji racionalan broj k takav da je $a = 2k$ i $b = 5k$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{(2k)^2}{2k \cdot 5k + (5k)^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4k^2}{10k^2 + 25k^2} = \frac{4k^2}{35k^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4}{35}$$ 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Kocka ima 8 vrhova. S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica koje su u vrhovima velike kocke.
2 BODA

Kocka ima 12 bridova. S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica koje su uz bridove velike kocke. 2 BODA

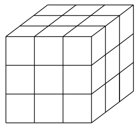
Kocka ima 6 strana. S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica, po jedna na svakoj strani kocke.
1 BOD

Niti s jedne strane nije obojena $27 - 8 - 12 - 6 = 1$ jedinična kockica. 1 BOD

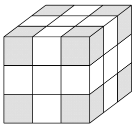
……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Nakon lijepljenja jediničnih kockica, velika kocka izgleda kao na donjoj slici.

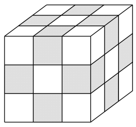


S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica.



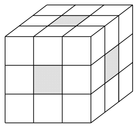
2 BODA

S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica.



2 BODA

S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica.



1 BOD

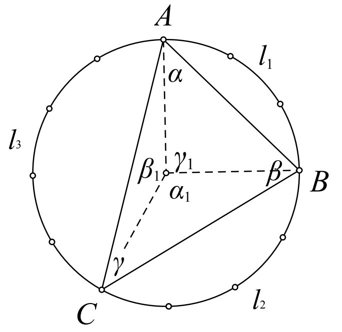
Niti s jedne strane nije obojena $27 - 8 - 12 - 6 = 1$ jedinična kockica. 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja ili bez slike donose po 1 bod.

4. Neka je n broj stranica (vrhova) traženog mnogokuta.
   Iz jednog vrha tog mnogokuta može se nacrtati $n - 3$ dijagonale,
   a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta jednak je $\frac{n(n-3)}{2}$. 1 BOD
   U mnogokutu koji ima $n + 5$ stranica,
   iz jednog vrha može se nacrtati $n + 5 - 3 = n + 2$ dijagonale,
   a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta je $\frac{(n+5)(n+2)}{2}$. 1 BOD
   Prema uvjetu zadatka vrijedi: $\frac{n(n-3)}{2} + 50 = \frac{(n+5)(n+2)}{2}$ 1 BOD
   Rješavanjem ove jednadžbe dobiva se redom
   $n(n-3) + 100 = (n+5)(n+2)$ 1 BOD
   $n^2 - 3n + 100 = n^2 + 7n + 10$ 1 BOD
   $10n = 90$
   i konačno $n = 9$. 1 BOD
   …………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA
   Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova. Ako nema svih računa, nego samo točan konačan rezultat, onda se boduje s 2 boda.

5. Prvi način:



Duljine kružnih lukova $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{AC}$ označimo redom l_1, l_2 i l_3, a odgovarajuće im središnje kutove γ_1, α_1 i β_1.

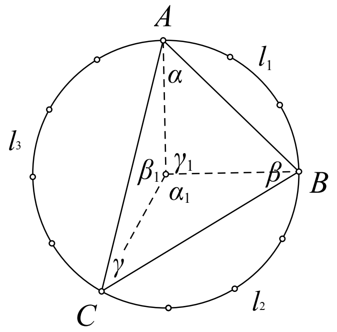
Budući da je $l_1 = \frac{3}{12} \cdot 2r\pi = \frac{1}{4} \cdot 2r\pi$ i $l_1 = \frac{r\pi}{180°} \cdot \gamma_1$, slijedi da je $\gamma_1 = \frac{r\pi}{2} \cdot \frac{180°}{r\pi} = 90°$. 2 BODA

Analogno dobivamo da je $\alpha_1 = 120°$ i $\beta_1 = 150°$. 2 BODA

Kutovi trokuta α, β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1, β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$ i $\gamma = 45°$. 2 BODA

…………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Duljine kružnih lukova iste kružnice proporcionalne su veličinama pripadnih središnjih kutova pa uz oznake kao na slici vrijedi $\gamma_1 : \alpha_1 : \beta_1 = 3 : 4 : 5$. 1 BOD

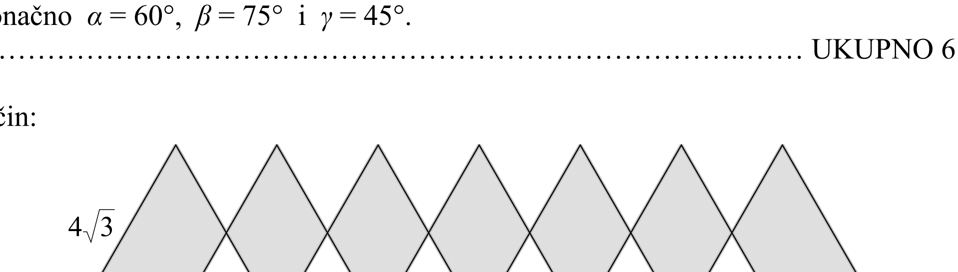
Budući da je $\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 = 360°$ i $360° : (3 + 4 + 5) = 360° : 12 = 30°$, 1 BOD

zaključujemo da je $\gamma_1 = 3 \cdot 30° = 90°$, $\alpha_1 = 4 \cdot 30° = 120°$ i $\beta_1 = 5 \cdot 30° = 150°$. 2 BODA

Kutovi trokuta α, β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1, β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$ i $\gamma = 45°$. 2 BODA

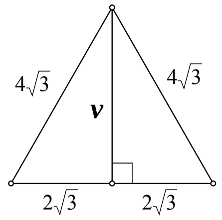
…………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Površina sivog dijela jednaka je zbroju površina 7 sukladnih jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm umanjenim za zbroj $2 \cdot 6 = 12$ površina (na „bijelim mjestima“ preklopljeni su i oduzeti dijelovi dvaju trokuta!) jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3}$ cm. 3 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.

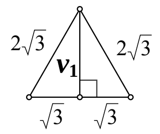


$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

$v = 6$ cm 2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$

$v_1 = 3$ cm 2 BODA

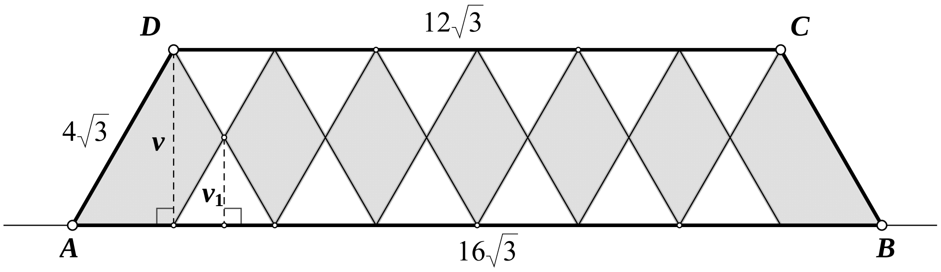
Površina tog trokuta jednaka je $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $7 \cdot P_1 - 12 \cdot P_2 = 7 \cdot 12\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2.

1 BOD

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

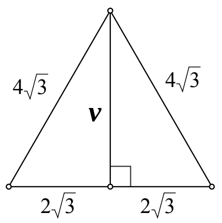
Drugi način:



Površina sivog dijela jednaka je površini trapeza *ABCD* umanjenoj za zbroj površina 12 „bijelih“ jednakostraničnih trokuta. 2 BODA

Duljine osnovica trapeza su $|AB| = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm i $|CD| = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm 1 BOD

Duljina visine trapeza jednaka je duljini visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm. Određujemo je primjenom Pitagorinog poučka.



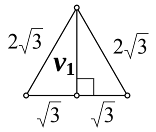
$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

$v = 6$ cm 2 BODA

Površina trapeza *ABCD* jednaka je

$P_{ABCD} = \frac{16\sqrt{3} + 12\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 14\sqrt{3} \cdot 6 = 84\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$

$v_1 = 3$ cm 2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

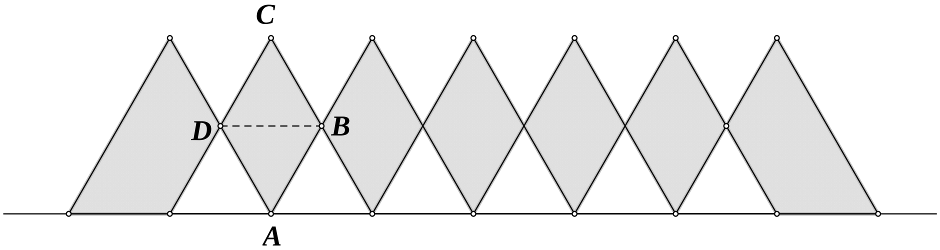
Površina sivog dijela lika jednaka je $P_{ABCD} - 12 \cdot P_1 = 84\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2 .

1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

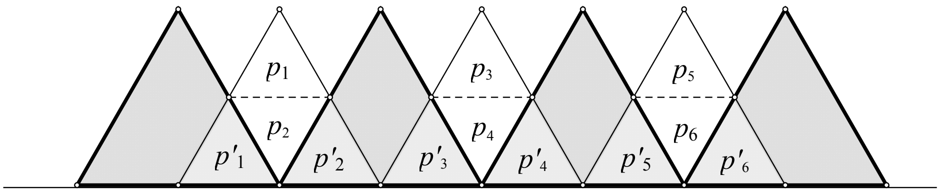
Treći način:

Romb *ABCD* na slici sastavljen je od dva sukladna jednakostranična trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3}$ cm. Ti su trokuti sukladni „bijelim“ trokutima sa slike



2 BODA

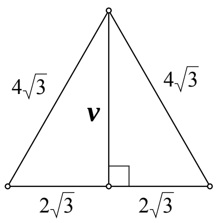
Neke od „sivih“ rombova možemo podijeliti na trokute i presložiti tako da popune bijele dijelove, kao što je prikazano na slici:



2 BODA

Dakle, površina sivih dijelova slike jednaka je površini četiriju jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.



$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

$v = 6$ cm 2 BODA

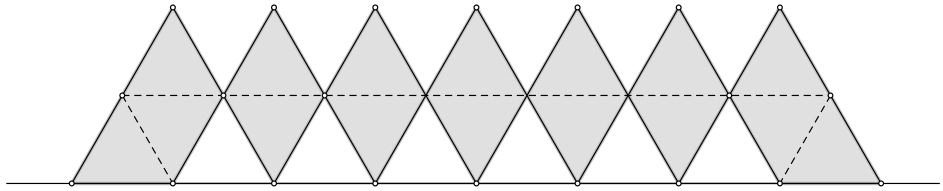
Površina tog trokuta jednaka je $P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $4 \cdot P = 4 \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2 . 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

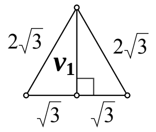
Sivi dio zadanog lika možemo podijeliti, kao što je prikazano na slici, na 16 jednakostraničnih trokuta.



3 BODA

Budući da su dužinama spajana polovišta stranica jednakostraničnih trokuta, dobiveni su trokuti slični zadanom „velikom“ trokutu, s upola kraćim stranicama. Dakle, duljina stranice tih trokuta je $2\sqrt{3}$ cm. 3 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$

$v_1 = 3$ cm 2 BODA

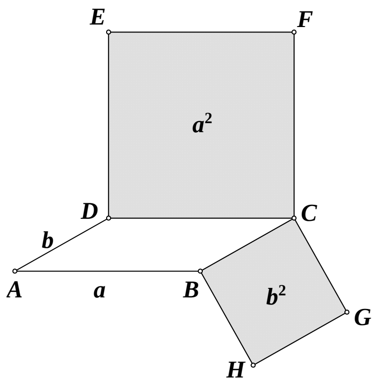
Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $16 \cdot P_1 = 16 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2 . 1 BOD

……………………………………………………………………….....……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno izračunata površina velikog trokuta, odnosno površina malog trokuta vrednuje se s po 3 boda (ako su ispravno izračunate obje površine, to donosi ukupno 6 bodova).

7. Prvi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a s b duljinu kraće stranice.) 1 BOD

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$. 1 BOD

Budući da je $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo $15^2 = 113 + 2ab$ odnosno $2ab = 225 - 113 = 112$. 2 BODA

Budući da je $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo

$(a-b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 113 - 112$, odnosno $(a-b)^2 = 1$. 2 BODA

Ako je $(a-b)^2 = 1$, onda (uz pretpostavku da je $a > b$ tj. da je $a - b > 0$) mora biti $a - b = 1$.

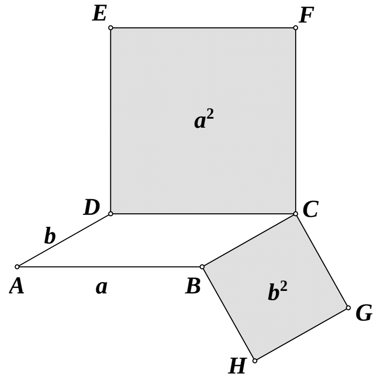
2 BODA

Duljine stranica zadovoljavaju sustav jednadžbi $\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 1 \end{cases}$ 1 BOD

Rješavanjem sustava nalazimo rješenje $a = 8$ cm i $b = 7$ cm. 1 BOD

……………………………………………………………………….....……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a s b duljinu kraće stranice.) 1 BOD

Tada vrijedi $2a+2b=30$ odnosno $a+b=15$

i $a^2+b^2=113$. 1 BOD

Iz $a+b=15$ slijedi da je $b=15-a$ pa nakon uvrštavanja dobivamo $a^2+(15-a)^2=113$ 1 BOD

odnosno $a^2+225-30a+a^2=113$. 1 BOD

Sređivanjem jednadžbe dobivamo $2a^2-30a+112=0$, a nakon dijeljenja cijele jednadžbe s 2,
dobivamo $a^2-15a+56=0$. 1 BOD

Tu jednadžbu možemo faktorizirati tj. napisati u obliku umnoška $(a-8)(a-7)=0$. 2 BODA

Umnožak dvaju brojeva jednak je nuli samo u slučaju da je jedan od tih brojeva jednak nuli, 1 BOD
tj. samo u slučaju a = 8 cm (i tada je b = 7 cm) ili a = 7 cm (i tada je b = 8 cm). 1 BOD

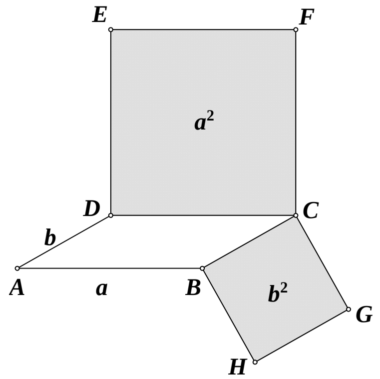
Kako smo označili sa a dulju stranicu paralelograma, drugi slučaj otpada.

Dakle, a = 8 cm i b = 7 cm. 1 BOD

…………………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Analogan postupak i bodovanje provodi se u slučaju da je korištena supstitucija $a=15-b$.

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova, ali mora biti jasno navedeno značenje korištenih oznaka i vidljiv zapis postupka (račun). Dakle, tim načinima rješavanja mora prethoditi skica ili opis



(Označimo sa a duljinu veće, a s b duljinu kraće stranice.)

Tada vrijedi $2a+2b=30$ odnosno $a+b=15$

i $a^2+b^2=113$.

a	14	13	12	11	10	9	8
$b = 15 - a$	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 + b^2$	197	173	153	127	125	117	113

U tom se slučaju rješenje može bodovati s 10 bodova. Ako oznaka, računa i objašnjenja nema, točan konačan rezultat donosi 2 boda.