Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Ako je $xyz = abc$, koliko je $\dfrac{bx}{xy+ab+bx} + \dfrac{cy}{yz+bc+cy} + \dfrac{az}{zx+ca+az}$?

2. Prirodne brojeve redom ispisujemo tako da formiraju spiralu brojeva kao na slici:

$$\begin{array}{ccccccccc}
21 & 22 & & 23 & & 24 & & 25 & 26 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
20 & 7 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 10 & \\
 & \uparrow & & & & & & & \\
19 & 6 & & 1 & \rightarrow & 2 & & 11 & \\
 & \uparrow & & & & \downarrow & & & \\
18 & 5 & \leftarrow & 4 & \leftarrow & 3 & & 12 & \\
 & & & & & & & & \\
17 & 16 & & 15 & & 14 & & 13 &
\end{array}$$

Pozicija nekog broja određuje se u odnosu na broj 1. Primjerice, broj 24 nalazi se za 1 mjesto udesno i 2 mjesta prema gore. Odredite poziciju na kojoj se nalazi broj 2015 u odnosu na broj 1.

3. Svaki je član Maričine obitelji popio 4 decilitra mješavine kave i mlijeka. Količina kave i mlijeka je različita u svakoj šalici, ali nikad nije nula. Marica je popila jednu četvrtinu ukupne količine mlijeka i jednu šestinu ukupne količine kave. Koliko članova ima Maričina obitelj?

4. Skup točaka (x, y) u koordinatnoj ravnini za koje vrijedi

$$|x| \leqslant a,\ a \in \mathbb{Z},\ a > 0,\ x + y \geqslant 0,\ |1 - y| \leqslant 2,$$

sadrži 2015 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Odredite broj a i površinu danog skupa točaka.

5. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ točno jedan od brojeva $A_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ i $B_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ djeljiv s 5.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Odredite realni parametar k tako da sustav jednadžbi

$$\left[Im\left(z+\frac{1}{2}i\right)\right]^2 = |z+2|^2 + \frac{5}{4} \quad \text{i} \quad Im(z) - 2Re(z) = k, z \in \mathbb{C}$$

ima samo jedno rješenje?

2. U pravokutnom trokutu kojemu je c duljina hipotenuze, a, b duljine kateta te α, β njima redom nasuprotni kutovi, vrijedi nejednakost $5c^4 \geqslant 6a^2c^2 + 8b^4$. Odredite sve vrijednosti koje mogu poprimiti kutovi α i β u tom trokutu.

3. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{gathered} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 126 \\ x + y - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 36 + 2\sqrt{xy} = 0. \end{gathered}$$

4. Pinokio ponedjeljkom i utorkom govori istinu, subotom uvijek laže, a ostale dane u tjednu ili govori istinu ili laže. Na pitanje "Koji ti je predmet u školi najdraži?" šest uzastopnih dana u tjednu davao je redom sljedeće odgovore: "Povijest", "Matematika", "Zemljopis", "Fizika", "Kemija", "Fizika". Koji predmet Pinokio najviše voli? Objasnite svoj odgovor.

5. Točka E je polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$. Na dijagonali $\overline{AC}$ odabrana je točka F tako da je trokut EFD pravokutan s pravim kutom u F. U kojem omjeru točka F dijeli dijagonalu $\overline{AC}$?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Uređeni parovi (a, b) i (c, d) su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}\log_{225} x + \log_{64} y = 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 = 1.\end{aligned}$$

Izračunajte $\log_{30}(abcd)$.

2. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, α, β, γ njima nasuprotni kutovi i R polumjer trokutu opisane kružnice, dokažite da vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

3. U trostranoj piramidi $ABCD$ pobočka BDC okomita je na osnovku ABC, $|BD| = |DC| = 1$, a svi bočni bridovi pri vrhu D zatvaraju kut od $60°$. Odredite obujam trostrane piramide.

4. Nad stranicama pravokutnog trokuta kojemu su a, b duljine kateta, konstruirani su prema van kvadrati. Izračunajte (u ovisnosti o a i b) površinu trokuta kojemu su vrhovi u središtima konstruiranih kvadrata.

5. Odredite sve proste brojeve p, q i prirodan broj r tako da vrijedi

$$p^2 + q^2 + pq = r^2.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Odredite područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ i odredite broj rješenja jednadžbe $f(x)=a$, u ovisnosti o realnom broju a.

2. Izračunajte površinu trokuta kojemu duljine dviju stranica iznose 13 cm i 14 cm, a duljina simetrale kuta između tih dviju stranica iznosi $\frac{28\sqrt{13}}{9}$ cm.

3. Zadani su pravci $p_1 \ldots y=\frac{1}{4}x$, $p_2 \ldots y=9x$ i točka $T(6,-1)$. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom T, a os apscisa, pravce p_1, p_2 i os ordinata siječe redom u točkama A, B, C, D tako da vrijedi $|AB|=|CD|$.

4. Zadane su sljedeće funkcije:

$$f(x)=10^{10x},\ g(x)=\log\left(\frac{x}{10}\right),\ h_1(x)=g(f(x)),\ h_n(x)=h_1(h_{n-1}(x)),$$

za sve $n \geqslant 2$. Odredite zbroj znamenaka broja $h_{2015}(1)$.

5. Na nekom košarkaškom turniru ekipe "Vukovi" i "Medvjedi" su prvu četvrtinu odigrali neriješeno. Bodovi koje su Vukovi osvojili u svakoj od 4 četvrtine čine rastući geometrijski niz, a bodovi koje su Medvjedi osvojili po četvrtinama čine rastući aritmetički niz. Na kraju su Vukovi pobijedili s jednim bodom razlike. Niti jedna ekipa nije osvojila više od 100 bodova. Odredite ukupan broj bodova koje su obje ekipe zajedno osvojile na kraju prvog poluvremena.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.