ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.

Rješenje.

Najmanji djelitelj broja n je 1. 1 bod

Iz uvjeta zadatka slijedi da je drugi najmanji djelitelj broja n broj 5. 1 bod

Najveća dva djelitelja broja n su $\frac{n}{5}$ i n. 2 boda

Dakle

$$1122 = n + \frac{n}{5} = \frac{6n}{5},$$ 1 bod

iz čega slijedi $n = 935$. 1 bod

Zadatak A-1.2.

Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3+b^3 = 2ab(a+b)$. Odredi $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$.

Rješenje.

Faktorizacijom lijeve strane dobivamo $(a+b)(a^2-ab+b^2) = 2ab(a+b)$. 1 bod

Budući da su brojevi a i b pozitivni vrijedi $a+b \neq 0$, pa dobivenu jednakost možemo podijeliti s $a+b$. 1 bod

Stoga slijedi $a^2-ab+b^2 = 2ab$, odnosno $a^2+b^2 = 3ab$. 1 bod

Kvadriranjem dobivamo $a^4+2a^2b^2+b^4 = 9a^2b^2$, 1 bod
odnosno $a^4+b^4 = 7a^2b^2$. 1 bod

Dijeljenjem s $a^2b^2 \neq 0$ dobivamo da je $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2b^2} = 7$. 1 bod

Napomena: Nužno je napisati da $a+b$ i ab nisu nula. Ako učenik to ne napiše, treba dobiti 1 bod manje nego što bi dobio da je komentirao mogućnost dijeljenja nulom.

Zadatak A-1.3.

Površina presjeka većeg i manjeg kvadrata iznosi dvije trećine površine manjeg kvadrata, a također i jednu petinu površine njihove unije. Odredi omjer duljina stranica većeg i manjeg kvadrata.

Prvo rješenje.

Označimo stranicu većeg kvadrata s a, a stranicu manjeg kvadrata s b.

Tada je površina presjeka jednaka $\frac{2}{3}b^2$. 1 bod

Površina unije jednaka je zbroju površina manjeg i većeg kvadrata umanjenom za površinu njihovog presjeka. 1 bod

Zato je površina presjeka $a^2 + b^2 - \frac{2}{3}b^2 = a^2 + \frac{1}{3}b^2$. 1 bod

Prema uvjetu zadatka je $\frac{2}{3}b^2 = \frac{1}{5}\left(a^2 + \frac{1}{3}b^2\right)$. 1 bod

Slijedi $\frac{2}{3}b^2 = \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{15}b^2$, tj. $\frac{9}{15}b^2 = \frac{1}{5}a^2$. Dakle, omjer površina je $a^2 : b^2 = 9 : 3 = 3 : 1$. 1 bod

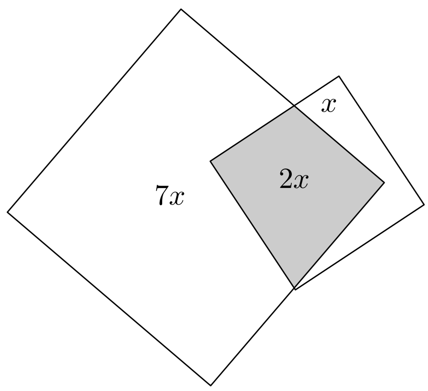
Iz toga slijedi da je omjer stranica $a : b = \sqrt{3} : 1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo površinu manjeg kvadrata s $3x$. Tada je površina presjeka jednaka $2x$. 1 bod

Prema uvjetu zadatka površina unije je $10x$. 1 bod

Površina dijela većeg kvadrata koji nije u presjeku površina tog dijela je $10x - 3x = 7x$. 2 boda



Slijedi da površina većeg kvadrata iznosi $2x + 7x = 9x$. 1 bod

Omjer površina većeg i manjeg kvadrata je $9 : 3$, tj. $3 : 1$, a traženi omjer je $\sqrt{3} : 1$. 1 bod

Zadatak A-1.4.

U ravnini je nacrtano sto kružnica s istim središtem polumjera $1, 2, \ldots, 100$. Najmanji krug obojan je crvenom bojom, a svaki od 99 kružnih vijenaca omeđenih dvjema kružnicama crvenom ili zelenom bojom tako da su susjedna područja različitih boja.

Odredi ukupnu površinu zeleno obojanih područja.

Prvo rješenje.

Ako je polumjer većeg kružnice n, a manje kružnice $n-1$, površina kružnog vijenca između njih je $n^2\pi - (n-1)^2\pi$.

Budući da je svako drugo područje zeleno, ukupna površina zelenih područja je

$$P_z = (2^2\pi - 1^2\pi) + (4^2\pi - 3^2\pi) + \cdots + (100^2\pi - 99^2\pi). \qquad \text{2 boda}$$

Primijenimo li formulu za razliku kvadrata $n^2 - (n-1)^2 = 1 \cdot (n-1+n)$, dobivamo

$$P_z = (1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100)\pi. \qquad \text{2 boda}$$

Prema formuli za zbroj prvih n prirodnih brojeva, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, dobivamo da je $P_z = \dfrac{100 \cdot 101\pi}{2} = 5050\pi$. 2 boda

Napomena: Učenici koji ne znaju formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva, rješenje mogu dovršiti koristeći Gaussovu dosjetku. Napišimo zbroj dvaput i zbrojimo dobivene jednakosti na sljedeći način:

$$\begin{array}{rccccccccc}
P_z = & \pi & + & 2\pi & + & \cdots & + & 99\pi & + & 100\pi \\
P_z = & 100\pi & + & 99\pi & + & \cdots & + & 2\pi & + & \pi \\
\hline
2P_z = & 101\pi & + & 101\pi & + & \cdots & + & 101\pi & + & 101\pi
\end{array}$$

Slijedi da je $2P_z = 100 \cdot 101\pi$, tj. $P_z = 5050\pi$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da je površina zelenih područja

$$P_z = (2^2\pi - 1^2\pi) + (4^2\pi - 3^2\pi) + \cdots + (100^2\pi - 99^2\pi). \qquad \text{2 boda}$$

Budući da je $n^2\pi - (n-1)^2\pi = (2n-1)\pi$, dobivamo

$$P_z = 3\pi + 7\pi + 11\pi + \cdots + 195\pi + 199\pi. \qquad \text{1 bod}$$

Napišimo ovaj zbroj dvaput (jednom kao gore, u rastućem poretku, te jednom unazad) i zbrojimo dobivene jednakosti:

$$\begin{array}{rccccccccc}
P_z = & 3\pi & + & 7\pi & + & \cdots & + & 195\pi & + & 199\pi \\
P_z = & 199\pi & + & 195\pi & + & \cdots & + & 7\pi & + & 3\pi \\
\hline
2P_z = & 202\pi & + & 202\pi & + & \cdots & + & 202\pi & + & 202\pi
\end{array}$$

Slijedi da je $2P_z = 50 \cdot 202\pi$, tj. $P_z = 5050\pi$. 3 boda

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja nosi 1 bod.

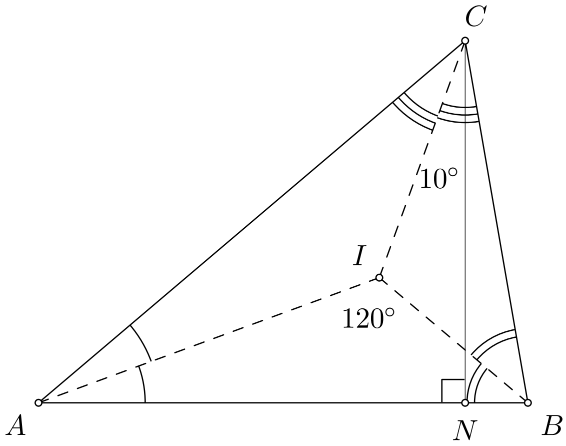
Napomena: Ako učenik računa zbroj površina crvenih područja (npr. zato što se zabuni oko poretka crvenih i zelenih područja) treba dobiti 1 bod manje nego što bi dobio da je istim postupkom računao zbroj površina zelenih područja.

Zadatak A-1.5.

Neka je I središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC i neka je $|AC| > |BC|$. Simetrala kuta i visina iz vrha C sijeku se pod kutom od $10°$. Ako je $\sphericalangle AIB = 120°$, odredi kutove trokuta ABC.

Prvo rješenje.

Označimo $\gamma = \sphericalangle ACB$. Neka je N nožište visine iz vrha C.



Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle BCN = \dfrac{\gamma}{2} - 10°$.

Trokut BCN je pravokutan, pa je $\sphericalangle CBN = 90° - \left(\dfrac{\gamma}{2} - 10°\right) = 100° - \dfrac{\gamma}{2}$. 1 bod

U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle CAB = 180° - \gamma - \left(100° - \dfrac{\gamma}{2}\right) = 80° - \dfrac{\gamma}{2}$. 1 bod

Budući da je I središte upisane kružnice, pravci AI i BI su simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$, redom. Odavde slijedi da je $\sphericalangle BAI = 40° - \dfrac{\gamma}{4}$ i $\sphericalangle ABI = 50° - \frac{\gamma}{4}$. 1 bod

Iz zbroja kutova u trokutu ABI slijedi $40° - \frac{\gamma}{4} + 50° - \frac{\gamma}{4} + 120° = 180°$, 1 bod
odakle je $\gamma = 60°$. 1 bod

Konačno je $\sphericalangle CBA = 100° - \frac{\gamma}{2} = 70°$ i $\sphericalangle BAC = 80° - \frac{\gamma}{2} = 50°$. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo $x = \sphericalangle BAI$ i $y = \sphericalangle ABI$. Tada je $x + y = 180° - 120° = 60°$. 1 bod

Neka je N nožište visine iz vrha C.

Budući da je AI simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, slijedi da je $\sphericalangle BAC = 2x$. Zato u pravokutnom trokutu ANC dobivamo $\sphericalangle ACN = 90° - 2x$. 1 bod

Analogno, $\sphericalangle ABC = 2y$ i $\sphericalangle BCN = 90° - 2y$. 1 bod

Simetrala kuta iz vrha C je pravac CI, pa prema uvjetu zadatka vrijedi $\sphericalangle NCI = 10°$.

Slijedi da je $\sphericalangle ACI = \sphericalangle ACN - \sphericalangle NCI = 90° - 2x - 10° = 80° - 2x$, te da je $\sphericalangle BCI = \sphericalangle BCN + \sphericalangle NCI = 90° - 2y + 10° = 100° - 2y$. 1 bod

Dakle, $80° - 2x = 100° - 2y$, pa dobivamo drugu jednadžbu $y - x = 10°$. 1 bod

Rješavanje sustava jednadžbi $x + y = 60°$ i $y - x = 10°$, dobivamo $x = 25°$ i $y = 35°$.
Slijedi da je $\sphericalangle CBA = 2y = 70°$, $\sphericalangle BAC = 2x = 50°$ i $\sphericalangle ACB = 60°$. 1 bod

Zadatak A-1.6.

Postoji li prirodan broj n takav da je $n^2+2n+2015$ kvadrat nekog prirodnog broja?

Prvo rješenje.

Prepostavimo da postoji prirodni broj m takav da je

$$n^2 + 2n + 2015 = m^2.$$

Ako je n neparan, onda m mora biti paran. 1 bod

Budući da je n neparan, onda n^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 4 1 bod

(ako je $n = 2k + 1$, onda je $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$).

Broj $2n$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 4, pa $n^2 + 2n + 2015$ daje ostatak 2. 1 bod

S druge strane, m^2 je djeljiv sa 4, pa dobivamo kontradikciju. 2 boda

Ako je n paran, onda m mora biti neparan. 1 bod

Budući da je n paran, onda je n^2 i $2n$ djeljivo sa 4. 1 bod

Zato $n^2 + 2n + 2015$ daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 4. 1 bod

S druge strane, m je neparan, pa m^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. Dakle, i u ovom slučaju dolazimo do kontradikcije. 2 boda

Ne postoji prirodni broj n takav da je $n^2 + 2n + 2015$ potpun kvadrat.

Drugo rješenje.

Pretpostavimo da postoji prirodni broj m takav da je

$$n^2 + 2n + 2015 = m^2.$$

Tada je

$$(n + 1)^2 + 2014 = m^2.$$ 1 bod

Zapišemo li jednakost na način

$$m^2 - (n + 1)^2 = 2014,$$

onda lijevu stranu jednakosti možemo faktorizirati i dobivamo

$$(m + (n + 1))(m - (n + 1)) = 2014.$$ 1 bod

Brojevi $m + (n + 1)$ i $m - (n + 1)$ su iste parnosti, 4 boda

pa njihov umnožak mora biti ili neparan ili djeljiv s 4, a 2014 je paran broj koji nije djeljiv s 4. Zato ne postoje takvi prirodni brojevi m i n. 4 boda

Napomena: Učenik koji dođe do jednakosti $(m+n+1)(m-n-1)=2014$, može faktorizirati $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ i promatrati slučajeve.

Tvrdnja da su brojevi $m+n+1$ i $m-n-1$ prirodni (ili ispisivanje slučajeva s negativnim djeliteljima od 2014) nosi 1 bod.

Tvrdnja da je $m-n-1$ manji od ta dva broja (ili ispisivanje slučajeva u kojima je $m-n-1$ veći djelitelj od 2014 nego $m+n+1$) nosi 1 bod.

Razlikovanje četiri slučaja nosi 2 boda:

$m-n-1=1$, $m-n-1=2$, $m-n-1=19$, $m-n-1=2\cdot 19$.

Dokaz da svaki od slučajeva vodi na kontradikciju nosi ukupno 4 boda, po 1 bod za svaki slučaj.

Evo kako izgleda potpun dokaz u slučaju: $m-n-1=19$, $m+n+1=2\cdot 53=106$.

Zbrajanjem jednakosti dobivamo $2m = 19+106 = 125$. Budući da 125 nije paran broj vidimo da ne postoje takvi m i n.

Primijetite da u svim slučajevima kontradikciju dobivamo upravo zato što brojevi $m+n+1$ i $m-n-1$ moraju istovremeno biti iste parnosti i različite parnosti.

Zadatak A-1.7.

Na nogometnom turniru sudjeluje pet ekipa koje igraju svaka sa svakom točno jednom. Pobjeda donosi 3 boda, poraz 0 bodova, a neriješeno 1 bod. Može li se dogoditi da na kraju turnira, u ukupnom poretku, svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće?

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da se može dogoditi da na kraju turnira svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće.

Svaka od pet ekipa je odigrala četiri utakmice, pri čemu u jednoj utakmici sudjeluju dvije ekipe. Slijedi da je ukupno odigrano $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ utakmica. 1 bod

Ako je broj bodova posljednje ekipe bio x, onda je zbroj bodova svih ekipa

$$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) = 20 + 5x.$$ 1 bod

S druge strane, broj bodova u deset utakmica je najmanje 20, a najviše 30, pa x može biti 0, 1 ili 2. 1 bod

Ako je $x=0$, ukupan broj bodova je 20 što znači da su sve utakmice završile neriješenim rezultatom. No, u tom slučaju bi sve ekipe imale isti broj bodova. 1 bod

Ako je $x=2$, ukupan broj bodova je 30 što znači da su sve utakmice završile pobjedom jedne ekipe i porazom druge. No, u tom slučaju bi broj bodova svake ekipe bio djeljiv s 3, što nije istina jer posljednja ekipa ima 2 boda. 1 bod

Preostaje nam slučaj kada je $x=1$. Tada ekipe imaju redom 9, 7, 5, 3 i 1 bod.

Odredimo koliko je poraza i pobjeda pojedina ekipa ostvarila:

Prvoplasirana ekipa ima 3 pobjede i 1 poraz jer je $9 = 3+3+3+0$.

Druga ekipa ima 2 pobjede, 1 poraz, i 1 neriješenu utakmicu jer je $7 = 3 + 3 + 1 + 0$.

Treća ekipa ima 1 pobjedu, 2 neriješene utakmice i 1 poraz jer je $5 = 3 + 1 + 1 + 0$. 2 boda

Ukupan broj bodova je 25 što znači da je točno 5 utakmica završilo neriješeno, a 5 utakmica pobjedom jedne ekipe i porazom druge. 1 bod

No, iz gornjeg razmatranja vidimo da su prve tri ekipe ostvarile 6 pobjeda, što daje kontradikciju. 2 boda

Zaključujemo da nije moguće da na kraju turnira, u ukupnom poretku, svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće.

Napomena: U slučaju $x = 1$, ako učenik ne primijeti da broj pobjeda mora biti točno 5 zbog ukupnog broja bodova, rješenje može dovršiti kao u drugom rješenju ili ovako:

Posljednja ekipa je izgubila tri utakmice, a jednu remizirala jer je $1 = 1 + 0 + 0 + 0$.

Četvrta ekipa ima ili jednu pobjedu i tri poraza (prvi slučaj), ili tri neriješena rezultata i jedan poraz (drugi slučaj) jer je $3 = 3 + 0 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0$.

U prvom slučaju, ukupno je sedam utakmica završilo pobjedom jedne ekipe, a devet utakmica porazom jedne ekipe. To naravno nije moguće.

U drugom slučaju, šest je utakmica završilo pobjedom, a sedam utakmica porazom. Ni to nije moguće.

Bodovanje ovakvog pristupa: broj pobjeda, poraza i neriješenih utakmica za prve tri ekipe nosi 2 boda, navođenje slučajeva za pobjede, poraze i neriješene utakmice četvrte ekipe nosi 1 bod, a izvođenje kontradikcije u svakom od dva slučaja nosi po 1 bod. Ukupno, slučaj $x = 1$ nosi 5 bodova.

Napomena: Ako je svaka utakmica završila pobjedom, bodovi ekipa ne moraju nužno biti 0, 3, 6, 9 i 12, ali broj bodova svake ekipe mora biti djeljiv sa 3.

Drugo rješenje.

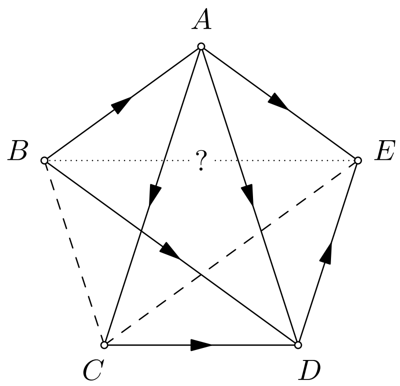
Pretpostavimo da se može dogoditi da na kraju turnira svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće. Nazovimo ekipe redom A, B, C, D i E krenuvši od ekipe koja ima najviše bodova prema ekipi koja ima najmanje bodova.

Ako ekipa E ima 0 bodova, onda je ta ekipa izgubila utakmicu protiv ekipe D. Dakle, ekipa D bi trebala imati barem 3 boda, pa razlika između ekipa D i E ne može biti točno dva boda. 1 bod

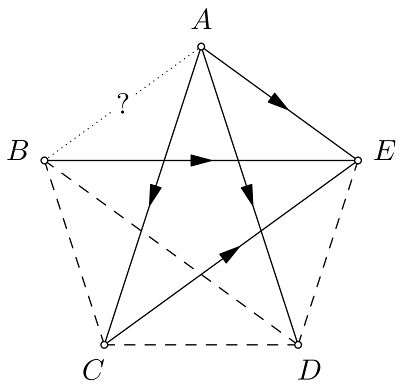
Ako ekipa E ima 1 bod, onda ekipe D, C, B i A imaju redom 3, 5, 7 i 9 bodova.

Ekipa D ima 3 boda. Ako je ekipa D pobijedila bilo koju od ekipa A, B ili C, onda bi morala izgubiti od ekipe E, što je nemoguće jer E ima samo 1 bod. Dakle, ekipa D je pobijedila ekipu E i izgubila sve ostale utakmice ili ima jedan poraz i tri neriješene utakmice. 1 bod

Ako je ekipa D pobijedila ekipu E, onda je D izgubila od A, B i C. To znači da je C pobijedila D i u ostale tri utakmice C ima jedan poraz i dva neriješena. Ekipa A je morala imati tri pobjede i jedan poraz, pa slijedi da je A pobijedila C i izgubila od B, te da je C igrala neriješeno s B i E. Ovime smo zaključili da je B pobijedila ekipe A i D i igrala neriješeno s C, što joj donosi 7 bodova. To znači da je B trebala izgubiti od E, što nije moguće. 2 boda

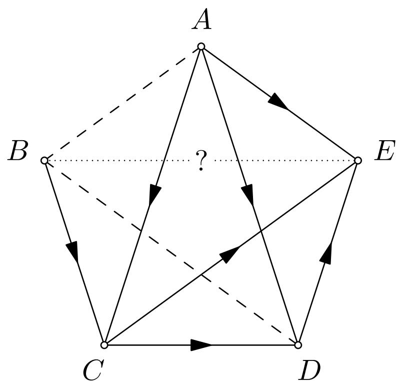


Preostala je mogućnost da je ekipa D igrala neriješeno s ekipama B, C i E, te izgubila od A (jer A ima tri pobjede i jedan poraz, a nema neriješenih utakmica). Tada je ekipa E izgubila od A, B i C. Dakle, ekipa C je pobijedila ekipu E i igrala neriješeno s ekipom D, čime je ostvarila 4 od ukupno 5 bodova. Dakle, C je morala izgubiti od ekipe A (jer A nema neriješenih utakmica) i igrati neriješeno s ekipom B. Ovime smo zaključili da je ekipa B pobijedila E i igrala neriješeno s C i D, što joj donosi 5 bodova. No, budući da u utakmici s ekipom A ne može osvojiti 2 boda slijedi da je nemoguće da B ima 7 bodova. 2 boda



Ako ekipa E ima 2 boda, onda ekipe D, C, B i A imaju redom 4, 6, 8 i 10 bodova. Ekipa A može imati 10 bodova samo ako je u tri utakmice pobijedila i jednu igrala neriješeno. Ekipa B može imati 8 bodova samo ako je u dvije utakmice pobijedila i u dvije igrala neriješeno. Dakle, ekipe A i B su obje neporažene, pa su one odigrale neriješeno i A je pobijedila sve ostale ekipe.

Ekipa C je izgubila od ekipe A, pa 6 bodova u preostale tri utakmice može ostvariti samo uz dvije pobjede i jedan poraz. Budući da ekipa B nema poraza, to povlači da je C pobijedila D i E, te izgubila od B. Ekipa D je izgubila od ekipa A i C, pa bi 4 boda trebala ostvariti protiv B i E. Budući da B nije poražena, slijedi da je D igrala neriješeno protiv B i pobijedila E. Ovime smo zaključili da je ekipa E izgubila od ekipa A, C i D. No, budući da u utakmici s ekipom B ne može osvojiti 2 boda nemoguće je da E ima 2 boda. 2 boda



Ako ekipa E ima 3 boda, onda bi pobjednička ekipa imala 11 bodova. što je broj koji je nemoguće dobiti kao zbroj četiri broja iz skupa $\{0, 1, 3\}$. Dakle, taj slučaj je nemoguć.

Ako ekipa E ima 4 boda, onda bi ekipa A imala 12 bodova, što znači da je pobijedila u svim utakmicama. Ekipa B bi imala 10 bodova, što je moguće jedino ako bi u tri utakmice pobijedila i jednu odigrala neriješeno. No, to također nije moguće jer onda ne bi izgubila utakmicu od ekipe A.

Nadalje, ekipa E ne može imati više od 4 boda jer bi onda ekipa A imala više od 12 bodova, što je nemoguće ostvariti u samo četiri utakmice. 2 boda

Budući da svi slučajevi vode na kontradikciju, nije moguće da na kraju turnira, u ukupnom poretku, svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Dokaži sljedeću tvrdnju: ako je z kompleksni broj za koji je $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0$, onda je $|z| = 1$.

Prvo rješenje.

Neka je $z = x + yi$. Tada je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}\right) && \text{1 bod}\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{(x+(y-1)i)(x-(y+1)i)}{(x+(y+1)i)(x-(y+1)i)}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{(x+(y-1)i)(x-(y+1)i)}{x^2+(y+1)^2}\right) && \text{1 bod}\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{x^2+y^2-1-2yi}{x^2+(y+1)^2}\right) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}. && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Dakle, iz uvjeta $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) = 0$ slijedi $x^2 + y^2 = 1$, 1 bod

odnosno $|z| = 1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $w = \dfrac{z-i}{z+i}$. Ako je $\operatorname{Re} w = 0$, onda je $w + \overline{w} = 0$. 1 bod

Budući da je $\overline{w} = \dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}$, slijedi 1 bod

$$0 = \frac{z-i}{z+i} + \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{(z-i)(\overline{z}-i)+(\overline{z}+i)(z+i)}{(z+i)(\overline{z}-i)}, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$(z-i)(\overline{z}-i) + (\overline{z}+i)(z+i) = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Sređivanjem dobivamo

$$z\overline{z} - iz - i\overline{z} + i^2 + z\overline{z} + iz + i\overline{z} + i^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad z\overline{z} = 1. \qquad \text{1 bod}$$

Dakle, $|z|^2 = z\overline{z} = 1$, tj. $|z| = 1$. 1 bod

Treće rješenje.

Ako je $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=0$, onda je $\frac{z-i}{z+i}=bi$ za neki realni broj b. 1 bod

Rješavanjem te jednadžbe po z dobivamo da je

$$z=\frac{b-i}{-1+bi} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{b-i}{-1+bi}\cdot\frac{-1-bi}{-1-bi}=\frac{-2b+i(1-b^2)}{b^2+1}. \qquad \text{1 bod}$$

Sada je

$$|z|^2=\frac{4b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{(1-b^2)^2}{(b^2+1)^2} \qquad \text{1 bod}$$

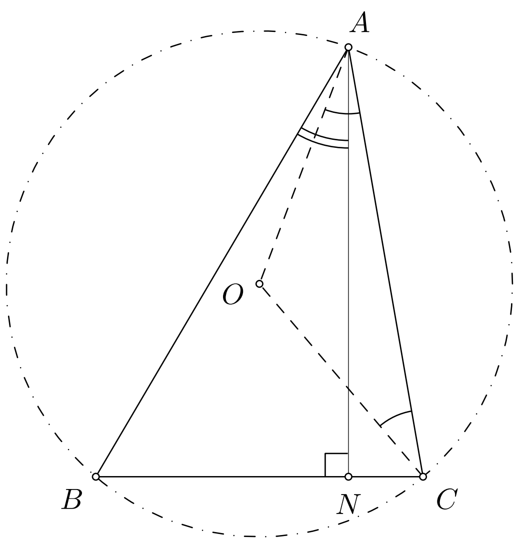
$$=\frac{4b^2+1-2b^2+b^4}{b^4+2b^2+1}=1, \qquad \text{1 bod}$$

iz čega slijedi $|z|=1$. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN=\sphericalangle CAO$.

Rješenje.



Trokut AOC je jednakokračan (jer je $|AO|=|CO|$), pa je

$$\sphericalangle CAO=\sphericalangle ACO=\frac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle AOC). \qquad \text{1 bod}$$

Budući da je $\sphericalangle ABC$ obodni kut nad središnjim kutom $\sphericalangle AOC$ vrijedi

$$\sphericalangle AOC=2\sphericalangle ABC=2\sphericalangle ABN. \qquad \text{2 boda}$$

Slijedi da je

$$\sphericalangle CAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle ABN) = 90^\circ - \sphericalangle ABN. \qquad \text{1 bod}$$

S druge strane, trokut ABN je pravokutan, pa je

$$\sphericalangle BAN = 90^\circ - \sphericalangle ABN, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak A-2.3.

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000\,000$ koji su kvadrati prirodnih brojeva, a daju ostatak 4 pri dijeljenju sa 8?

Prvo rješenje.

Odredimo koji prirodni brojevi n zadovoljavaju navedeno svojstvo, da im je kvadrat oblika $8k+4$.

Ako je broj neparan, onda je i njegov kvadrat neparan. Dakle, n mora biti paran. 1 bod

Ako je broj djeljiv sa 4, njegov kvadrat je djeljiv sa 16, pa onda i sa 8. 1 bod

To znači da n mora biti oblika $4l+2$. 1 bod

Provjerimo da svi takvi brojevi zadovoljavaju navedeno svojstvo: Ako je $n = 4l+2$, onda je $n^2 = 16l^2 + 16l + 4$, a to je oblika $8k+4$. 1 bod

Primijetimo da je kvadrat prirodnog broja manji od $1\,000\,000$ ako i samo ako je taj prirodni broj manji od $1\,000$. Dakle, treba odrediti koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000$ koji su oblika $4k+2$.

Konačno, takvi su svi brojevi $2, 6, 10, \ldots, 998$, tj. oblika $4k+2$ za $k = 0, 1, 2, \ldots, 249$. 1 bod

Takvih je brojeva 250. 1 bod

Drugo rješenje.

Budući da je $(8k+r)^2 = 64k^2 + 16kr + r^2$, slijedi da $(8k+r)^2$ i r^2 daju isti ostatak pri dijeljenju s 8. 1 bod

Ostaci kvadrata brojeva $0, 1, 2, \ldots, 7$ pri dijeljenju sa 8 su redom $0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1$. 1 bod

Zaključujemo da $(8k+r)^2$ daje ostatak 4 pri dijeljenju sa 8 ako i samo je $r = 2$ ili $r = 6$. 2 boda

Primijetimo da je kvadrat prirodnog broja manji od $1\,000\,000$ ako i samo ako je taj prirodni broj manji od $1\,000$. Dakle, treba odrediti koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000$ koji su oblika $8k+2$ ili $8k+6$.

Brojevi oblika $8k+2$ manji od $1\,000$ su $2, 10, \ldots, 994$, tj. svi za $k = 0, 1, 2, \ldots, 124$. Takvih brojeva je 125. 1 bod

Brojevi oblika $8k+6$ manji od $1\,000$ su $6, 14, \ldots, 998$, tj. svi za $k = 0, 1, 2, \ldots, 124$. Takvih brojeva je također 125, pa je konačno rješenje 250. 1 bod

Zadatak A-2.4.

Zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe $x^4 + ax^2 + b = 0$ jednak je 32, a umnožak svih rješenja te jednadžbe je 4. Odredi a i b.

Prvo rješenje.

Uvedimo supstituciju $t = x^2$. Time bikvadratna jednadžba prelazi u kvadratnu

$$t^2 + at + b = 0,$$

pa iz Viètovih formula slijedi da za rješenja t_1 i t_2 te kvadratne jednadžbe vrijedi

$$t_1 + t_2 = -a \quad \text{i} \quad t_1 \cdot t_2 = b. \qquad \text{2 boda}$$

Vraćanjem supstitucije iz $x^2 = t_1$ i $x^2 = t_2$ dobivamo da su rješenja početne jednadžbe

$$x_1 = \sqrt{t_1}, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}, \quad x_3 = \sqrt{t_2} \quad \text{i} \quad x_4 = -\sqrt{t_2}. \qquad \text{1 bod}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (-t_1) \cdot (-t_2) = b, \quad \text{tj.} \quad b = 4, \qquad \text{1 bod}$$

$$32 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t_1 + t_1 + t_2 + t_2 = 2(t_1 + t_2) = -2a, \quad \text{tj.} \quad a = -16. \qquad \text{2 boda}$$

Drugo rješenje.

Ako sa x_1, x_2, x_3 i x_4 označimo rješenja jednadžbe $x^4 + ax^2 + b = 0$, iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 32 \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4.$$

Korištenjem Vièteovih formula za polinome četvrtog stupnja dobivamo

$$b = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4, \quad \text{tj.} \quad b = 4, \qquad \text{2 boda}$$

$$a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$
$$\text{i} \quad 0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \qquad \text{1 bod}$$

Sada je

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) && \text{2 boda} \\ &= 32 + 2a, \quad \text{tj.} \quad a = -16. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Treće rješenje.

Bikvadratna jednadžba ima rješenja X, $-X$, Y, $-Y$.

Umnožak tih brojeva je $X^2Y^2 = 4$, a zbroj kvadrata $2(X^2 + Y^2) = 32$. 1 bod

Rješavanjem dobivenog sustava dobivamo $X^2 = 8 \pm 2\sqrt{15}$ i $Y^2 = 8 \mp 2\sqrt{15}$. 1 bod

Iz $X^2 = 8 \pm 2\sqrt{15}$ dobivamo $X^4 = 124 \pm 32\sqrt{15}$.

Budući da su X i $-X$ rješenja jednadžbe $x^4 + ax^2 + b = 0$ slijedi

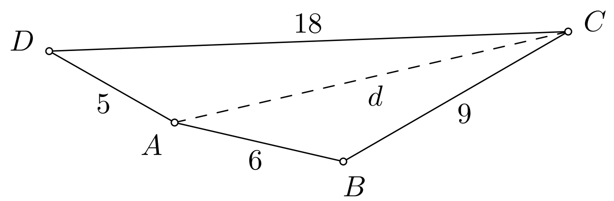
$$124 + 8a + b + (32 + 2a)\sqrt{15} = 0 \quad \text{i} \quad 124 + 8a + b - (32 + 2a)\sqrt{15} = 0.$$ 2 boda

Zbrajanjem, odnosno oduzimanjem dobivenih jednakosti slijedi $124 + 8a + b = 0$ i $32 + 2a = 0$. Odavde lako dobivamo da je $a = -16$ i $b = 4$. 2 boda

Zadatak A-2.5.

U četverokutu $ABCD$ zadano je $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $|CD| = 18$ i $|AD| = 5$. Odredi duljinu dijagonale $\overline{AC}$ ako je poznato da je ta duljina prirodni broj.

Rješenje.



Neka je $|AC| = d$, gdje je d prirodni broj. Primjenom nejednakosti trokuta na trokute ABC i ADC redom dobivamo

$$|AB| + |BC| > |AC|, \quad \text{tj.} \quad d < 6 + 9 = 15,$$ 2 boda

$$|AC| + |AD| > |DC|, \quad \text{tj.} \quad d > 18 - 5 = 13.$$ 2 boda

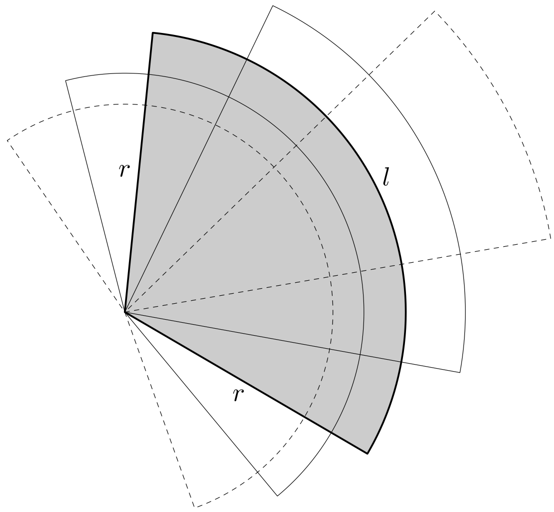
Budući da je $13 < d < 15$ prirodni broj, zaključujemo da je $d = 14$. 2 boda

Zadatak A-2.6.

Žicom duljine d treba ograditi zemljište u obliku kružnog isječka tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

Rješenje.

Neka je r polumjer kružnog isječka, a l duljina njegovog luka. Onda je $2r + l = d$. 1 bod



Površina kružnog isječka je $P = \dfrac{rl}{2}$. 4 boda

Zato je $P = \dfrac{rl}{2} = \dfrac{1}{2} r(d - 2r)$. 1 bod

Primijetimo da je ovisnost P o r dana kvadratnom funkcijom $P(r) = -r^2 + \frac{1}{2} dr$. Najveća vrijednost te funkcije se postiže za $r = \dfrac{d}{4}$. 3 boda

Uvrštavanjem vrijednosti $r = \dfrac{d}{4}$ dobivamo da najveća moguća površina iznosi $\dfrac{d^2}{16}$. 1 bod

Napomena: Formulu za površinu kružnog isječka $P = \dfrac{rl}{2}$ učenik ne mora izvoditi. No, ako tu formulu ne zna, može je izvesti na sljedeći način.

Neka je α mjera kuta koji zatvaraju dva polumjera kružnog isječka. Tada je površina kružnog isječka jednaka $P = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \pi$, a duljina luka tog kružnog isječka $l = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r\pi$. Eliminacijom varijable α dobivamo traženu formulu.

Napomena: Najveća moguća vrijednost površine može se odrediti i primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine. Primijenimo li tu nejednakost na pozitivne brojeve r i $\dfrac{d}{2} - r$ vidimo da je

$$P = r\left(\frac{d}{2} - r\right) \leqslant \left(\frac{r + \frac{d}{2} - r}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{16}.$$

U ovom pristupu nije potrebno komentirati da se najveća moguća vrijednost postiže za $r = \dfrac{d}{4}$ (iako to lako vidimo jer se jednakost postiže ako i samo ako je $r = \dfrac{d}{2} - r$).

Zadatak A-2.7.

Na košarkaškom turniru svaka od ekipa igra točno dva puta sa svakom od ostalih ekipa. Pobjeda donosi 2 boda, poraz 0 bodova, a neriješenog rezultata nema. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji košarkaški turnir s n ekipa na kojem je jedna ekipa, pobjednik turnira, imala 26 bodova, a točno dvije ekipe najmanji broj bodova, i to 20 bodova.

Rješenje.

Označimo ukupan broj ekipa s n. Neka je a broj ekipa koje su osvojile 24 boda, a b broj ekipa koje su osvojile 22 boda. Tada je broj ukupan broj ekipa

$$n = 3 + a + b,$$ 1 bod

a ukupan broj bodova u svim utakmicama je

$$2n(n-1) = 26 + 24a + 22b + 40.$$ 1 bod

Uvrstimo li $b = n - 3 - a$ iz prve jednakosti u drugu, dobivamo

$$26 + 24a + 22n - 66 - 22a + 40 = 2n(n-1), \quad \text{tj.} \quad a = n(n-12).$$ 1 bod

Budući da je a nenegativan broj, slijedi $n \geqslant 12$. 1 bod

Uvrstimo li $a = n(n-12)$ u $n = 3 + a + b$, možemo napisati

$$b = (13-n)n - 3,$$ 1 bod

iz čega zbog nenegativnosti od b slijedi da je $n < 13$. 1 bod

Dakle, $n = 12$, $a = 0$ i $b = 9$. 1 bod

Ovime smo dokazali da ako takav turnir postoji, onda je broj ekipa nužno 12. Potrebno je još pokazati da zaista postoji takav turnir sa 12 ekipa. To ćemo učiniti tako da eksplicitno napišemo ishode svih utakmica jednog takvog turnira.

Označimo pobjednika turnira s A, zadnje dvije ekipe s X i Y, a ostalih devet ekipa s $B_1, B_2, \ldots, B_9$.

Neka je ekipa A pobijedila ekipe X i Y dva puta i jednom svaku ekipu B_i, $i = 1, \ldots, 9$.

U skupu $\{X, Y, B_1, \ldots, B_9\}$ neka je svatko svakog pobijedio točno jednom.

Uz takve ishode utakmica ekipa A ima $9 + 2 \cdot 2 = 13$ pobjeda, tj. 26 bodova.

Ekipe X i Y imaju po 10 pobjeda, tj. 20 bodova (jer su po jednom pobijedile sve protivnike iz skupa $\{X, Y, B_1, \ldots, B_9\}$ kojih ima 10).

Ekipe B_i, $i = 1, \ldots, 9$ imaju po 11 pobjeda, tj. 22 boda (jer su također po jednom pobijedile sve protivnike iz skupa $\{X, Y, B_1, \ldots, B_9\}$ i jednom su pobijedile ekipu A). 3 boda

Napomena: Učenik treba uočiti da je potrebno konstruirati primjer koji će pokazati da je turnir s 12 ekipa i zadanim rasporedom bodova zaista moguć, tj. eksplicitno navesti jedan takav turnir. Konstrukcija primjera nosi 3 boda.

Napomena: Primjer se može konstruirati na više različitih načina i svaki točan primjer (koji se razlikuje od službenog) treba također bodovati s 3 boda.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve x i y vrijedi

$$\log^2(xy) \geqslant \log(x^2)\log(y^2).$$

Rješenje.

Vrijedi $\log^2(xy) = (\log x + \log y)^2$ — 1 bod

te $\log(x^2) = 2\log x$ i $\log(y^2) = 2\log y$. — 1 bod

Korištenjem tih formula dobivamo

$$\log^2(xy) - \log(x^2)\log(y^2) = (\log x + \log y)^2 - 4\log x \log y = (\log x - \log y)^2 \geqslant 0.$$ 4 boda

Napomena: Ako učenik koristi nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na $\log x$ i $\log y$ (koji mogu biti negativni!) treba dobiti 2 boda od posljednja 4 boda.

Zadatak A-3.2.

Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

pri čemu je x realni broj.

Rješenje.

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \cos^4 x + \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Korištenjem formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, dobivamo da je taj izraz zadani izraz jednak

$$\frac{1+\cos^4 x + \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$ 1 bod

Svođenjem na potpun kvadrat i ponovnom primjenom formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobivamo izraz

$$\frac{1 + (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$ 1 bod

Rastavljanjem i korištenjem formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ dobivamo izraz

$$\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x} - 2 = \frac{8}{\sin^2 2x} - 2.$$ 2 boda

Budući da je $\sin 2x \in [-1,1]$, onda je $\sin^2 2x \in [0,1]$ i zaključujemo da zadani izraz može poprimiti sve vrijednosti iz intervala $[6, +\infty\rangle$. 2 boda

Zadatak A-3.3.

Odredi najveći prirodni broj n takav da

$$n + 5 \mid n^4 + 1395.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo izraz $n^4 + 1395$ kao $n^4 - 5^4 + 5^4 + 1395$. 2 boda

Primijenimo li formulu za razliku kvadrata dva puta i zbrojimo li $5^4 + 1395 = 2020$ dobivamo

$$n^4 + 1395 = (n-5)(n+5)(n^2+25) + 2020,$$ 2 boda

odakle slijedi da $n + 5$ mora dijeliti 2020. 1 bod

Dakle, traženi n je 2015. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $k = n + 5$, tj. $n = k - 5$. Tada prema binomnom poučku slijedi

$$n^4 + 1395 = (k-5)^4 + 1395 = k^4 - 20k^3 + 150k^2 - 500k + 625 + 1395.$$ 4 boda

Tražimo najveći k takav da k dijeli $625 + 1395 = 2020$. To je upravo $k = 2020$. 1 bod

Dakle, traženi n je 2015. 1 bod

Zadatak A-3.4.

Neka je $ABCD$ tetraedar u kojem je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 90°$, $|AD| = 2\sqrt{2}$ te $|AB| = |AC| = 3$. Odredi polumjer sfere upisane tom tetraedru.

Rješenje.

Označimo sa $P(XYZ)$ površinu trokuta XYZ.

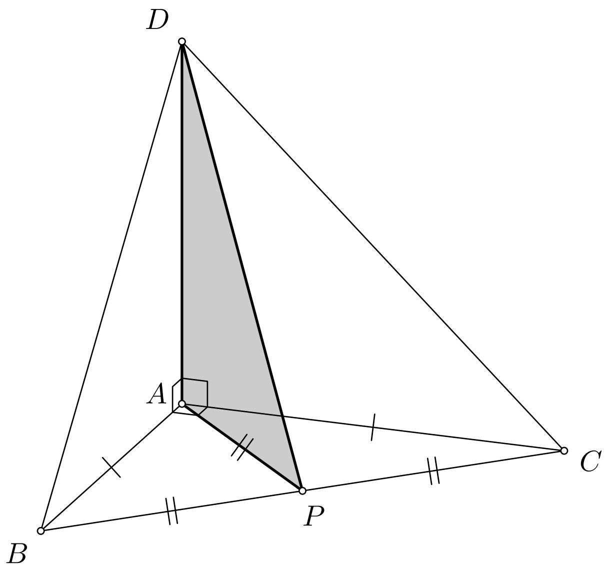
Neka je V volumen tetraedra, O oplošje, a r polumjer upisane sfere.

Koristit ćemo poznatu formulu $V = \dfrac{Or}{3}$. 1 bod

Neka je P polovište dužine $\overline{BC}$. Budući da je trokut ABC jednakokračan pravokutan, imamo $|BC| = 3\sqrt{2}$ i $|AP| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Prema Pitagorinom poučku u pravokutnom trokutu APD je

$$|DP| = \sqrt{|AD|^2 + |AP|^2} = \sqrt{8 + \frac{9}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$ 1 bod

Slijedi da je $P(BCD) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DP| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2}$. 1 bod



Budući da je $P(ABC) = P(ACD) = 3\sqrt{2}$ i $P(ABC) = \frac{9}{2}$, a izračunali smo da je $P(BCD) = \frac{15}{2}$, slijedi da je oplošje tetraedra $O = 6\sqrt{2} + 12$. 1 bod

Volumen tetraedra je $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. 1 bod

Iz formule $V = \frac{Or}{3}$ slijedi da je $r = \frac{3V}{O} = \frac{18\sqrt{2}}{6\sqrt{2}+12} = \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$. 1 bod

Napomena: Duljinu $|DP|$ možemo izračunati i na sljedeći način. Prema Pitagorinom poučku u trokutu ACD vrijedi $|CD| = \sqrt{|AC|^2 + |AD|^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17}$.

Prema Pitagorinom poučku u trokutu PCD je

$$|DP| = \sqrt{|CD|^2 - |PC|^2} = \sqrt{17 - \frac{9}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Napomena: Ako učenik ne zna formulu $V = \frac{Or}{3}$, može ju izvesti na sljedeći način.

Neka je I središte upisane sfere tetraedru $ABCD$. Tetraedar $ABCD$ možemo rastaviti na tetraedre $ABCI$, $ABDI$, $BCDI$ i $ACDI$. Svakom od ta 4 tetraedra baza je strana tetraedra $ABCD$, a duljina visine r. Zato slijedi da je

$$\begin{aligned} V(ABCD) &= V(ABCI) + V(ABDI) + V(BCDI) + V(ACDI) \\ &= \frac{1}{3}rP(ABC) + \frac{1}{3}rP(ABD) + \frac{1}{3}rP(BCD) + \frac{1}{3}rP(ACD) = \frac{1}{3}rO. \end{aligned}$$

Zadatak A-3.5.

Odredi najmanji prirodni broj n takav da u svakom skupu koji se sastoji od n cijelih brojeva postoje tri međusobno različita elementa a, b i c takva da je $ab+bc+ca$ djeljivo sa 3.

Rješenje.

Promotrimo koliko najviše elemenata može imati skup u kojem ne postoje tri različita elementa a, b i c takvi da je $ab + bc + ca$ djeljivo sa 3. Neka je S takav skup s najviše elemenata.

Ako bi skup S sadržavao dva broja koja su djeljiva sa 3, nazovimo ih a i b, onda bi uz izbor bilo kojeg trećeg broja c iz tog skupa izraz $ab + bc + ca$ bio djeljiv sa 3. Dakle, S može sadržavati najviše jedan broj djeljiv sa 3. 1 bod

Promotorimo tri broja a, b i c od kojih nijedan broj nije djeljiv sa 3. Ako sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3 onda je izraz $ab + bc + ca$ djeljiv s 3. 1 bod

To znači da najviše dva elementa skupa S mogu davati ostatak 1 pri dijeljenju sa 3 i najviše dva elementa mogu davati ostatak 2. 1 bod

Dakle, S može imati najviše 5 elemenata. 1 bod

Ostaje provjeriti da je moguće da S ima točno 5 elemenata (tj. da naša ograda nije pregruba). 1 bod

Promotrimo skup u kojem je jedan broj djeljiv sa 3, dva daju ostatak 1, te dva daju ostatak 2 pri dijeljenju sa 3. Neka su a, b i c tri broja iz tog skupa.

Ako među brojevima a, b i c ima točno jedan broj koji je djeljiv sa 3, onda izraz $ab + bc + ca$ nije djeljiv sa 3.

Ako dva od ta tri broja daju ostatak 1, a treći broj daje ostatak 2 ili ako dva od ta tri broja daju ostatak 2, a treći broj daje ostatak 1, onda je $ab + bc + ca$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, tj. izraz $ab + bc + ca$ nije djeljiv sa 3. Time je završena provjera. 1 bod

Zaključujemo da je najmanji traženi n jednak 6.

Zadatak A-3.6.

Neka je ABC trokut u kojem je $\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = 1$ i $\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = 2$.
Odredi omjer $|BC| : |AB|$.

Prvo rješenje.

Povucimo visinu iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ i označimo njeno nožište s N.

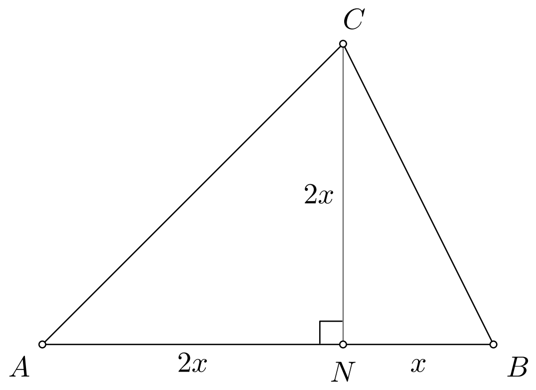
Kutovi $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$ su šiljasti (jer su im tangensi pozitivni), pa iz pravokutnih trokuta CAN i CBN vidimo da je

$$1 = \operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \operatorname{tg} \sphericalangle NAC = \frac{|CN|}{|AN|},$$ 2 boda

$$2 = \operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \operatorname{tg} \sphericalangle NBC = \frac{|CN|}{|BN|}.$$ 2 boda

Slijedi

$$|BN| : |AN| = 1 : 2.$$ 1 bod



Označimo $|BN| = x$ i $|AN| = |CN| = 2x$. Tada je

$$|AB| = |AN| + |NB| = 2x + x = 3x,$$ 1 bod

a iz Pitagorinog poučka primijenjenog na pravokutni trokut CBN dobivamo

$$|BC| = \sqrt{|CN|^2 + |BN|^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5}x.$$ 2 boda

Zaključujemo da je

$$|BC| : |AB| = \sqrt{5}x : 3x = \sqrt{5} : 3.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$, te $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Izračunajmo $\operatorname{tg}\gamma$. Prema formuli za tangens zbroja dobivamo

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{1+2}{1 - 1 \cdot 2} = -3.$$ 1 bod

Slijedi da je $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3.$ 1 bod

Prema poučku o sinusima vrijedi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. 1 bod

Koristeći poučak o sinusima i poučak o kosinusu dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$ 2 boda

Budući da je $\operatorname{tg}\alpha = 1$, a $\operatorname{tg}\beta = 2$, iz gornje formule slijedi

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2), \quad \text{tj.} \quad 3b^2 = c^2 + 3a^2.$$ 1 bod

Drugu relaciju između a, b i c dobivamo na sličan način koristeći

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$ 2 boda

Uvrstimo li $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\operatorname{tg}\gamma = 3$, dobivamo

$$b^2 + c^2 - a^2 = 3(b^2 + a^2 - c^2), \quad \text{tj.} \quad 2c^2 = 2a^2 + b^2.$$ 1 bod

Eliminacijom varijable b u sustavu $3b^2 = c^2 + 3a^2$, $2c^2 = 2a^2 + b^2$ dobivamo $9a^2 = 5c^2$, tj. $a : c = \sqrt{5} : 3$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$, te $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Kao u prethodnom rješenju možemo izračunati $\operatorname{tg} \gamma = 3$. 2 boda

Prema poučku o sinusima vrijedi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$. 1 bod

Želimo izraziti $\sin \alpha$ i $\sin \gamma$ preko $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \gamma$.

Budući da je $1 = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, nakon kvadriranja i uvrštavanja $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ dobivamo $1 - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, tj. $2 \sin^2 \alpha = 1$. 3 boda

Analogno, budući da je $3 = \operatorname{tg} \gamma$ slijedi $3(1 - \sin^2 \gamma) = \sin^2 \gamma$, tj. $10 \sin^2 \gamma = 9$. 3 boda

Slijedi da je

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} = \frac{5}{9}, \quad \text{tj.} \quad a : c = \sqrt{5} : 3.$$ 1 bod

Četvrto rješenje.

Neka je $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$, te $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Prema poučku o sinusima vrijedi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$. 1 bod

Vrijedi $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, 1 bod

pa dobivamo

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \cos \beta + \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} = \sin \beta \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right).$$ 3 boda

Budući da je $2 = \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin \beta}{\cos \beta}$ nakon kvadriranja i uvrštavanja $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ dobivamo $4(1 - \sin^2 \beta) = \sin^2 \beta$, tj. $5 \sin^2 \beta = 2$. 3 boda

Budući da je β šiljasti kut, slijedi da $\sin \beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 1 bod

Slijedi da je $\dfrac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1} \right) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ i konačno, traženi omjer je $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. 1 bod

Zadatak A-3.7.

Imamo deset bijelih, te po jednu crvenu, plavu, zelenu, žutu i ljubičastu karticu. Bijele kartice međusobno ne razlikujemo. Na točno jednoj strani svake kartice je znak X. Na koliko načina možemo složiti te kartice jednu na drugu tako da nikoje dvije kartice nisu okrenute jedna prema drugoj stranom na kojoj je X?

Rješenje.

Prvo ćemo rasporediti kartice bez obzira na koju stranu su okrenute (npr. možemo zamišljati da su sve okrenute stranom na kojoj je znak X prema dolje). Svaki raspored može se konstruirati tako da među 10 bijelih kartica koje ne razlikujemo redom stavljamo plavu, crvenu, zelenu, žutu i ljubičastu karticu.

Plavu karticu možemo staviti na 11 načina (prije prve bijele, iza prve bijele, iza druge bijele, ..., iza desete bijele). 1 bod

Crvenu karticu možemo staviti na 12 načina (sada imamo 11 kartica i crvenu možemo staviti prije prve od njih, iza druge, ..., iza jedanaeste). 1 bod

Slično razmišljmo dalje, pa tako zelenu karticu možemo staviti na 13 načina, nakon toga žutu na 14 i na kraju ljubičastu na 15 načina. 2 boda

Dakle, tih 15 kartica možemo rasporediti na $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$ načina. 1 bod

Odredimo sada na koliko načina možemo odabrati na koju stranu će svaka kartica biti okrenuta.

Ako je kartica koja se nalazi na stolu (tj. donja kartica) okrenuta tako da joj je strana na kojoj je znak X gore, onda sve ostale kartice moraju biti okrenute tako da im je strana na kojoj je znak X gore. 1 bod

Ako je donja kartica okrenuta tako da joj je strana na kojoj je znak X dolje, onda su ili sve kartice okrenute tako da im je strana na kojoj je znak X dolje ili je barem jedna kartica okrenuta tako da joj je strana na kojoj je znak X gore. U tom drugom slučaju pretpostavimo da je donjih k kartica okrenuto tako da im je strana na kojoj je znak X dolje, te $(k+1)$-va kartica okrenuta tako da joj je strana na kojoj je znak X gore. Tada sve kartice koje se nalaze iznad $(k+1)$-ve kartice također moraju biti okrenute tako da im je strana na kojoj je znak X gore. 2 boda

Broj k može biti bilo koji od 1 do 14. Dodamo li još dva slučaja u kojem su sve kartice okrenute tako da im je strana na kojoj je znak X gore, odnosno dolje, dobivamo da je ukupan broj načina da odaberemo kako će kartice biti okrenute 16. 1 bod

Konačno, raspored kartica i način na koji su okrenute su nezavisni, pa je ukupan broj načina da složimo sve kartice jednak $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$. 1 bod

Napomena: Rješenje ima dva dijela. Jedan dio se sastoji od prebrojavanja rasporeda kartica bez obzira na način kako su okrenute, a drugi dio se sastoji od prebrojavanja načina na koji možemo okrenuti kartice. Učenik može te dijelove zapisati u bilo kojem poretku.

Prvi dio rješenja moguće je argumentirati na više načina. Jedan način je da kažemo da 15 kartica na kraju zauzima 15 mjesta i da je potrebno odabrati na kojem mjestu će biti plava kartica, što možemo odabrati na 15 načina. Nakon toga biramo na kojem od preostalih 14 mjesta je crvena kartica, pa na kojem od 13 mjesta je zelena itd. Zaključujemo ponovno da je broj rasporeda jednak $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$.

Drugi način je da kažemo da je broj rasporeda kartica (bez obzira na način koji su okrenute) jednak broju permutacija s ponavljanjem pri čemu se 10 puta pojavljuje jedna vrsta objekata, a po jednom ostalih pet vrsta objekata. Prema formuli je zato broj rasporeda $\frac{15!}{10!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Neka su a, b i c realni brojevi i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana formulom

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c\sin x - 1.$$

Ako je $f(-2015) = 2015$, odredi $f(2015)$.

Rješenje.

Budući da je $(-x)^5 = -x^5, (-x)^3 = -x^3$ i $\sin(-x) = -\sin x$, vrijedi

$$f(-2015) = -2015^5 a - 2015^3 b - c\sin 2015 - 1.$$ 2 boda

Iz toga je $f(2015) = 2015^5 a + 2015^3 b + c\sin 2015 - 1 = -f(-2015) - 2 = -2017.$ 4 boda

Zadatak A-4.2.

Koliki je koeficijent uz x^9 u polinomu $(1 + x^3 + x^6)^{10}$?

Prvo rješenje.

Želimo odrediti koeficijent uz x^9 u polinomu

$$\underbrace{\left(1 + x^3 + x^6\right)\left(1 + x^3 + x^6\right)\cdots\left(1 + x^3 + x^6\right)}_{10 \text{ puta}}.$$

Budući da koristeći pribrojnike 6 i 3 broj 9 možemo prikazati samo kao $6+3$ i $3+3+3$, izmnožimo li sve zagrade u gornjem izrazu x^9 možemo dobiti na jedan od sljedeća dva načina: 1 bod

1) Iz jedne od 10 zagrada odaberemo x^6, iz jedne od preostalih 9 zagrada odaberemo x^3, te iz svih ostalih zagrada odaberemo 1. To možemo na $10 \cdot 9 = 90$ načina. 2 boda
2) Iz tri od 10 zagrada odaberemo x^3, te iz preostalih odaberemo 1.

   To možemo na $\binom{10}{3} = 120$ načina. 2 boda

Konačno rješenje je $90 + 120 = 210$. 1 bod

Drugo rješenje.

Prema binomnom poučku vrijedi

$$\left(1+x^3+x^6\right)^{10} = \left((1+x^3)+x^6)\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(1+x^3)^{10-k}x^{6k}. \qquad \text{1 bod}$$

Pribrojnici za koje je $k \geqslant 2$ ne doprinose koeficijentu x^9.

Za $k=0$ imamo $(1+x^3)^{10}$ i koeficijent uz x^9 je $\binom{10}{3} = 120$. 2 boda

Za $k=1$ imamo $10(1+x^3)^9x^6$ i koeficijent uz x^9 je $10\cdot 9 = 90$. 2 boda

Konačno rješenje je $90+120=210$. 1 bod

Napomena: Na sličan način se do rješenja može doći primjenom binomnog poučka na izraze $((x^3+x^6)+1)^{10}$ i $((1+x^6)+x^3)^{10}$.

Zadatak A-4.3.

Neka je n prirodni broj i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!(k^2+k+1)$. Izračunaj $\dfrac{S_n+1}{(n+1)!}$.

Prvo rješenje.

Za $n=1,2,3$ je $S_1=3$, $S_2=17$, $S_3=95$, te $\dfrac{S_1+1}{2!}=2$, $\dfrac{S_2+1}{3!}=3$, $\dfrac{S_3+1}{4!}=4$.

Dokažimo matematičkom indukcijom da je $\dfrac{S_n+1}{(n+1)!}=n+1$. 2 boda

Baza: $\dfrac{S_1+1}{2!}=2=1+1$. 1 bod

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n. Tada je

$$\frac{S_{n+1}+1}{(n+2)!} = \frac{S_n+(n+1)!\,((n+1)^2+(n+1)+1)+1}{(n+2)!} \qquad \text{1 bod}$$

Prema pretpostavci indukcije vrijedi $S_n+1=(n+1)(n+1)!$, pa slijedi

$$\frac{S_{n+1}+1}{(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+1)!+(n+1)!\,(n^2+3n+3)}{(n+2)!} = \frac{n^2+4n+4}{n+2} = n+2. \qquad \text{2 boda}$$

Time je po principu matematičke indukcije dokazano $\frac{S_n+1}{(n+1)!}=n+1$ za svaki $n\in\mathbb{N}$.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je $k^2+k+1=(k+1)^2-k$, pa je

$$k!(k^2+k+1) = (k+1)\cdot(k+1)!-k\cdot k! \qquad \text{2 boda}$$

Zato je

$$\begin{aligned} S_n &= ((n+1)\cdot(n+1)!-n\cdot n!)+(n\cdot n!-(n-1)\cdot(n-1)!)+\cdots+(2\cdot 2!-1\cdot 1!) \\ &= (n+1)\cdot(n+1)!-1\cdot 1!. \end{aligned} \qquad \text{3 boda}$$

Dakle, $\dfrac{S_n+1}{(n+1)!}=n+1$. 1 bod

Zadatak A-4.4.

U kutiji se nalazi jedna crvena i pet bijelih kuglica označenih brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Ne gledajući, Domagoj izvlači jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvuče crvenu kuglicu, nakon čega prekida izvlačenje. Izvučene kuglice se ne vraćaju u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama barem 10?

Prvo rješenje.

Označimo s A_k događaj: izvučeno je točno k kuglica ($k-1$ bijelih i jedna crvena). Označimo s B događaj: zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama je barem 10. Tada je prema Bayesovoj formuli

$$\begin{aligned} P(B) =& P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \\ &+ P(B|A_4)P(A_4) + P(B|A_5)P(A_5) + P(B|A_6)P(A_6). \end{aligned}$$

1 bod

Ako je crvena kuglica izvučena u prva tri izvlačenja, zbroj može biti najviše $4+5=9$, a ako je izvučena u 5. ili 6. izvlačenju, zbroj će biti najmanje $1+2+3+4=10$. Zato je

$$P(B|A_1) = P(B|A_2) = P(B|A_3) = 0 \quad \text{i} \quad P(B|A_5) = P(B|A_6) = 1.$$

1 bod

Ako je crvena kuglica izvučena u četvrtom izvlačenju, onda je zbroj barem 10 samo ako su izvučene kuglice s brojevima $1,4,5$ ili $2,3,5$ ili $2,4,5$ ili $3,4,5$. Svaka od te četiri trojke može se pojaviti na izvučenim kuglicama u bilo kojem od 3! poredaka. Zato je

$$P(B|A_4) = \frac{4 \cdot 3!}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{5}.$$

1 bod

Izračunajmo vjerojatnost da je izvučeno točno k kuglica, tj. $P(A_k)$.

Za $k=1$ ta vjerojatnost je $\frac{1}{6}$ jer od 6 mogućnosti samo je jedna mogućnost za taj događaj, a to je da izvučemo odmah crvenu kuglicu.

Za $k>1$ u prvom izvlačenju možemo izvući bilo koju od 5 bijelih kuglica od ukupno 6 kuglica, u sljedećem izvlačenju možemo izvući bilo koju od preostale 4 bijele kuglice od ukupno 5 kuglica i tako dalje sve dok u $(k-1)$-om izvlačenju ne izvučemo neku od preostalih $5-k+1$ bijelih kuglica od ukupno $5-k+2$ kuglica. Na kraju moramo izvući crvenu kuglicu od preostalih $5-k+1$ kuglica. Zato za sve $k=1,2,3,4,5,6$ vrijedi

$$P(A_k) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{5-k+1}{5-k+2} \cdot \frac{1}{5-k+1} = \frac{1}{6}.$$

2 boda

Konačno rješenje iznosi

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{5}.$$

1 bod

Drugo rješenje.

Zbroj brojeva na bijelim kuglicama koje su izvučene prije crvene će biti veći ili jednak 10 u jednom od sljedećih slučajeva:

1) crvena kuglica je izvučena u četvrtom izvlačenju i prve tri izvučene bijele kuglice imaju brojeve $1, 4, 5$ ili $2, 3, 5$ ili $2, 4, 5$ ili $3, 4, 5$.
2) crvena kuglica je izvučena u petom ili šestom izvlačenju. 1 bod

Radi jednostavnijeg postupka zamislimo da smo izvlačili kuglice dok nisu izvučene sve kuglice. Tada su svi ishodi izvlačenja jednako vjerojatni i ima ih $6!$.

Vjerojatnost događaja navedenog pod 1) je $4 \cdot \frac{3!2!}{6!}$, jer prve tri bijele kuglice možemo permutirati na $3! = 6$ načina, a one dvije bijele nakon crvene na $2! = 2$ načina. 2 boda

Vjerojatnost da je crvena kuglica izvučena u petom izvlačenju je $\frac{5!}{6!}$, a tome je jednaka i vjerojatnost događaja da je crvena kuglica izvučena u šestom izvlačenju (pet bijelih kuglica možemo permutirati na $5!$ načina).

Zato je vjerojatnost događaja navedenog pod 2) je $2 \cdot \frac{5!}{6!}$. 2 boda

Vjerojatnost događaja da je zbroj brojeva na izvučenim bijelih kuglicama barem 10 je

$$\frac{4 \cdot 3! \cdot 2! + 2 \cdot 5!}{6!} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}.$$ 1 bod

Zadatak A-4.5.

Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki 1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj.

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da ako je n složen broj, onda je to i R_n.

Neka je n složen broj. Zapišimo ga u obliku $n = mk$, gdje su m i k prirodni brojevi veći od 1.

Uočimo da se dekadski zapis broja R_n sastoji od k blokova koji sadrže m jedinica

$$R_n = \underbrace{111\dots11}_{n \text{ jedinica}} = \underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}\underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}\dots\underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}.$$ 1 bod

Gornji izraz sad možemo rastaviti na k pribrojnika

$$R_n = \underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}\underbrace{000\dots00}_{n-m \text{ nula}} + \underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}\underbrace{000\dots00}_{n-2m \text{ nula}} + \dots + \underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}\underbrace{000\dots00}_{m \text{ nula}} + \underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}},$$ 2 boda

pa kad izlučimo $R_m = \underbrace{111\dots11}_{m \text{ jedinica}}$ dobivamo

$$R_n = R_m \cdot (10^{n-m} + 10^{n-2m} + \dots + 10^m + 1).$$ 2 boda

Budući da su oba faktora u posljednjem izrazu veća od 1, slijedi da je R_n složen broj.

1 bod

Drugo rješenje.

Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: ako je n složen broj, onda je i R_n složen.

Budući da se R_n u svom dekadskom zapisu sastoji od n jedinica, možemo ga zapisati kao

$$R_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}.$$ 1 bod

Neka je n složen, tj. $n = mk$ za neke prirodne brojeve m i k veće od 1. Tada je

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{mk} - 1}{9} = \frac{(10^m)^k - 1}{9} && \text{1 bod}\\
&= \frac{(10^m - 1)(10^{m(k-1)} + 10^{m(k-2)} + \cdots + 10^m + 1)}{9} && \text{1 bod}\\
&= \frac{(10-1)(10^{m-1} + 10^{m-2} + \cdots + 10 + 1)(10^{m(k-1)} + 10^{m(k-2)} + \cdots + 10^m + 1)}{9} && \text{2 boda}\\
&= (10^{m-1} + 10^{m-2} + \cdots + 10 + 1)(10^{m(k-1)} + 10^{m(k-2)} + \cdots + 10^m + 1).
\end{aligned}$$

Budući da su m i k oba veći od 1, slijedi da su oba faktora u posljednjem izrazu veća od 1, iz čega zaključujemo da je i R_n složen broj. 1 bod

Zadatak A-4.6.

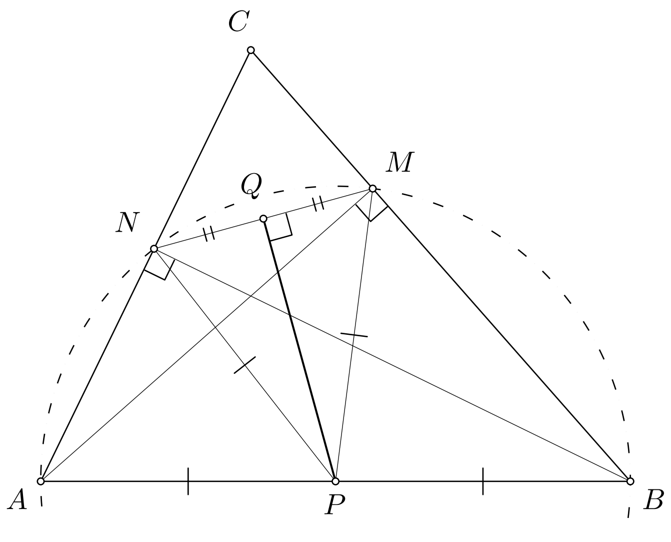
Neka su M i N redom nožišta visina iz vrhova A i B šiljastokutnog trokuta ABC. Neka je Q polovište dužine $\overline{MN}$, a P polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $|MN| = 10$ i $|AB| = 26$, odredi duljinu $|PQ|$.

Rješenje.

Budući da je $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90°$, četverokut $ABMN$ je tetivan. 2 boda

Središte kružnice opisane četverokutu $ABCD$ je točka P. 2 boda

Dužine $\overline{PN}$ i $\overline{PM}$ su polumjeri te kružnice, pa $|PN| = |PM| = |AP| = 13$. 1 bod



Budući da je Q polovište dužine $\overline{MN}$, vrijedi $|QN| = |QM| = 5$. 1 bod

Trokut PNM je jednakokračan, pa su trokuti NPQ i MPQ pravokutni. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku slijedi $|PQ| = \sqrt{|PM|^2 - |QM|^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. 3 boda

Zadatak A-4.7.

Neka je n prirodni broj. Svaki od brojeva n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$ ima najveći neparni djelitelj. Odredi zbroj tih najvećih neparnih djelitelja.

Rješenje.

Neka je $d(k)$ najveći neparni djelitelj broja k.

Ako je k neparan, onda je $d(k)=k$. 1 bod

Za bilo koji k, vrijedi $d(2k)=d(k)$. 2 boda

Neka je $s(n)=d(n)+d(n+1)+\cdots+d(2n-1)$.

Označimo traženi zbroj sa $s(n)=d(2n-1)+d(2n-2)+s(n-1)-d(n-1)$ 2 boda

Budući da je $d(2n-1)=2n-1$ i $d(2n-2)=d(n-1)$, zaključujemo da je

$$s(n)=s(n-1)+2n-1.$$ 1 bod

Slijedi da je

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n-1)+2n-1 \\ &= s(n-2)+(2n-3)+(2n-1) \\ &= \ldots \\ &= 1+3+\cdots+(2n-1). \end{aligned}$$ 2 boda

Budući da vrijedi $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$, traženi zbroj je $s(n)=n^2$. 2 boda

Napomena: Ako je poznato da je $s(n)=s(n-1)+2n-1$, onda se formula $s(n)=n^2$ može naslutiti na temelju malih n i dokazati matematičkom indukcijom. Formulacija tvrdnje nosi 2 boda, baza indukcije ne nosi bodove, a korak indukcije nosi 2 boda. Ako učenik izostavi bazu indukcije treba mu oduzeti 1 bod.