

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

Odredi koji je broj veći, A ili B .

Rješenje.

Sređivanjem danih algebarskih razlomaka dobivamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{6x^2y^2 + 3xy - 2xy - 1}{2xy + 1} \\ &= \frac{3xy(2xy + 1) - (2xy + 1)}{2xy + 1} \\ &= \frac{(2xy + 1)(3xy - 1)}{2xy + 1} \\ &= 3xy - 1 \end{aligned}$$

3 boda

i

$$\begin{aligned} B &= \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y} \\ &= \frac{x^3 - x - y^3 + y}{x - y} \\ &= \frac{(x^3 - y^3) - (x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1)}{x - y} \\ &= x^2 + xy + y^2 - 1. \end{aligned}$$

3 boda

Kako bismo odredili koji je broj veći, promotrimo razliku brojeva A i B :

1 bod

$$\begin{aligned} B - A &= (x^2 + xy + y^2 - 1) - (3xy - 1) \\ &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x - y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

2 boda

Budući da je $x \neq y$, zaključujemo da je $A < B$.

1 bod

Zadatak A-1.2.

Za prirodne brojeve a , b i prost broj p vrijedi $a^2 + p^2 = b^2$.

Dokaži da je $2(b + p)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Napomena: Učenikovo rješenje treba bodovati isključivo na temelju jednog službenog rješenja, tj. bodovi koji se dodjeljuju za tvrdnje iz različitih rješenja ne mogu se zbrajati.

Prvo rješenje.

Prebacivanjem a^2 na desnu stranu dobivamo ekvivalentnu jednakost $p^2 = b^2 - a^2$. Desnu stranu faktoriziramo kao razliku kvadrata: $p^2 = (b - a)(b + a)$. 1 bod

Budući da su a i b prirodni, brojevi $b - a$ i $b + a$ su različiti prirodni djelitelji broja p^2 , koji ima samo tri djelitelja: 1, p i p^2 . Stoga je $b - a = 1$ i $b + a = p^2$. 5 bodova

Zbrajanjem dobivenih jednadžbi dobivamo $2b = 1 + p^2$. 2 boda

Slijedi da je

$$2(b + p) = 2b + 2p = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2, \quad 2 \text{ boda}$$

pa je $2(b + p)$ zaista kvadrat prirodnog broja $p + 1$.

Napomena: Ako učenik bez dokaza tvrdi da je $2(b + p)$ kvadrat od $p + 1$, treba dobiti 1 bod.

Drugo rješenje.

Ako je $p = 2$, onda je $a^2 + 4 = b^2$. Kvadrati 1^2 i 2^2 se razlikuju za 3, a razlika između bilo koja druga dva kvadrata iznosi barem 5, pa je nemoguće da je $p = 2$. 1 bod

Dakle, možemo pretpostaviti da je p neparan prost broj.

Brojevi a , p i b čine Pitagorinu trojku, pa postoje prirodni brojevi d , m i n takvi da je

$$a = 2mnd, \quad p = d(m^2 - n^2), \quad b = d(m^2 + n^2). \quad 5 \text{ bodova}$$

Budući da je p prost broj, mora vrijediti $d = 1$. 1 bod

Zbrajanjem dobivamo

$$2(b + p) = 2(m^2 - n^2 + m^2 + n^2) = 4m^2, \quad 3 \text{ boda}$$

što je potpun kvadrat.

Treće rješenje.

Pokažimo da brojevi b i p oba moraju biti neparni.

Ako je $p = 2$, onda je $a^2 + 4 = b^2$. Kvadrati 1^2 i 2^2 se razlikuju za 3, a razlika između bilo koja druga dva kvadrata iznosi barem 5, pa je nemoguće da je $p = 2$. Dakle, možemo pretpostaviti da je p neparan prost broj. 1 bod

Ako je b paran broj, onda bi a morao biti neparan broj, pa bi broj $a^2 + p^2$ davao ostatak 2, dok bi b^2 davao ostatak 0 pri dijeljenju sa 4. Zato je b neparan broj. 1 bod

Prebacivanjem p^2 na desnu stranu dobivamo ekvivalentnu jednakost $a^2 = b^2 - p^2$. Desnu stranu faktoriziramo kao razliku kvadrata: $a^2 = (b - p)(b + p)$. 1 bod

Rješenje baziramo na sljedećoj činjenici: ako su x i y relativno prosti brojevi za koje je xy potpun kvadrat, onda su x i y također potpuni kvadrati.

Ideja je pokazati da je $M(b-p, b+p) = 2$ jer iz toga slijedi da je $b-p = 2x$, $b+p = 2y$ i $xy = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, te su x i y relativno prosti brojevi. Prethodno navedena činjenica tada povlači da je y potpun kvadrat, pa je zato i $2(b+p) = 4y$ potpun kvadrat.

3 boda

Vrijedi $M(b-p, b+p) = M(2p, b+p)$.

1 bod

Budući da je $b+p$ paran broj, da bismo pokazali da je $M(b-p, b+p) = 2$, dovoljno je pokazati da p ne dijeli b .

1 bod

Ako p dijeli b , onda p dijeli a i možemo pisati $a = pk$, $b = pl$ i $k^2 + 1 = l^2$.

1 bod

Budući da se nikoja dva kvadrata ne razlikuju za 1, dobivamo kontradikciju.

1 bod

Time je dokaz završen.

Zadatak A-1.3.

Odredi koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva takvih da uklanjanjem prve dvije, odnosno zadnje dvije znamenke dobivamo dva četveroznamenkasta broja koja daju isti ostatak pri dijeljenju s 99.

Rješenje.

Neka je \overline{abcdef} šesteroznamenkasti broj.

Brojevi \overline{abcd} i \overline{cdef} daju isti ostatak pri dijeljenju s 99 ako i samo ako 99 dijeli broj $\overline{abcd} - \overline{cdef}$.

1 bod

Budući da je

$$\begin{aligned}\overline{abcd} - \overline{cdef} &= 100\overline{ab} + \overline{cd} - (100\overline{cd} + \overline{ef}) \\ &= 100\overline{ab} - 99\overline{cd} - \overline{ef} \\ &= 99\overline{ab} + \overline{ab} - 99\overline{cd} - \overline{ef} \\ &= 99(\overline{ab} - \overline{cd}) + \overline{ab} - \overline{ef},\end{aligned}$$

1 bod

1 bod

broj \overline{abcdef} zadovoljava zadani uvjet ako i samo ako 99 dijeli $\overline{ab} - \overline{ef}$.

1 bod

Brojevi \overline{ab} i \overline{ef} su između 0 i 99, pa je njihova razlika djeljiva sa 99 samo ako je po iznosu jednaka 0 ili 99.

1 bod

Ako je razlika 0, onda su brojevi \overline{ab} i \overline{ef} jednaki. U ovom slučaju \overline{ab} možemo izabrati na 90 načina (kao bilo koji broj između 10 i 99).

1 bod

Razlika može biti 99 samo ako je $\overline{ab} = 99$ i $\overline{ef} = 00$.

Zato \overline{ab} i \overline{ef} možemo odabrati na ukupno $90 + 1 = 91$ način.

1 bod

Sad još preostaje prebrojati moguće središnje dijelove \overline{cd} broja \overline{abcdef} . Budući da je \overline{cdef} četveroznamenkasti broj, broj \overline{cd} može biti bilo koji između 10 i 99, što daje 90 načina.

2 boda

Ukupno, traženih brojeva ima $91 \cdot 90 = 8190$.

1 bod

Napomena: Ako učenik u brojanju mogućih središnjih dijelova \overline{cd} zaboravi da c ne smije biti nula, pa tvrdi da je 100 mogućnosti za \overline{cd} (od 00 do 99), u kojem slučaju bi krajnji rezultat bio $91 \cdot 100 = 9100$, treba mu oduzeti 1 bod.

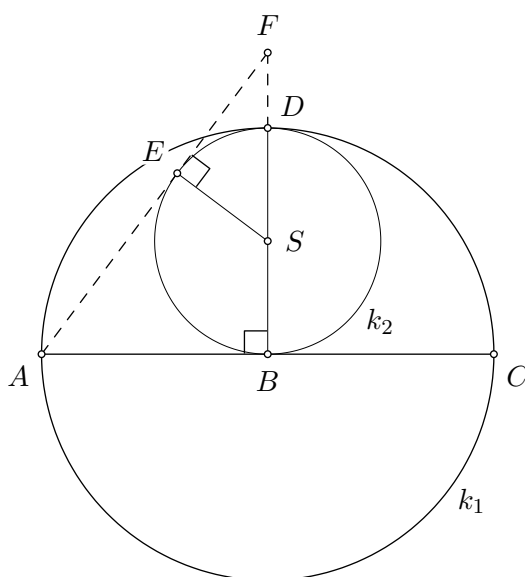
Ako učenik ne razmatra mogućnost da razlika $\overline{ab} - \overline{ef}$ može biti jednaka 99, u kojem slučaju bi krajnji rezultat bio $90 \cdot 90 = 8100$, treba mu oduzeti 2 boda.

Zadatak A-1.4.

Neka je \overline{AC} promjer kružnice k_1 kojoj je središte u točki B . Kružnica k_2 dira pravac AC u točki B i kružnicu k_1 u točki D . Tangenta iz A (različita od AC) na kružnicu k_2 dira tu kružnicu u točki E i siječe pravac BD u točki F . Odredi omjer $|AF| : |AB|$.

Prvo rješenje.

Neka je S središte kružnice k_2 i neka je $|BS| = |ES| = r$ polumjer te kružnice.



Budući da je točka S polovište dužine \overline{BD} , koja je polumjer kružnice k_1 , slijedi da je $|AB| = |BD| = 2r$. 1 bod

Vrijedi $|AE| = |AB| = 2r$ jer su to odsječci tangenti. 1 bod

Budući da je tangenta AB na kružnicu k_2 okomita na polumjer \overline{SB} , trokut ABF je pravokutan. 1 bod

Analogno, budući da je tangenta AE na kružnicu k_2 okomita na polumjer \overline{SE} kružnice k_2 , trokut SEF je pravokutan. 1 bod

Pravokutni trokuti ABF i SEF imaju iste kutove, pa su slični. 2 boda

Neka je $a = |FS|$. Iz spomenute sličnosti zaključimo $|AF| = |FS| \cdot \frac{|AB|}{|ES|} = 2|FS| = 2a$ 1 bod

i zaključujemo

$$2a - 2r = |AF| - |AE| = |EF| = \frac{1}{2} \cdot |BF| = \frac{1}{2}(r + a). \quad \text{2 boda}$$

Iz toga slijedi da je $3a = 5r$, odnosno $|AF| : |AB| = 2a : 2r = 5 : 3$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $|AB| = R$ polumjer veće kružnice. Neka je $|DF| = x$, $|EF| = y$ i neka je S središte manje kružnice.

Tada je $|AE| = |AB| = R$, jer su to odsječci tangenti. 1 bod

Točka S je polovište promjera \overline{BD} kružnice k_2 , pa je $|DS| = \frac{|BD|}{2} = \frac{R}{2}$. 1 bod

Budući da je tangenta AB na kružnicu k_2 okomita na polumjer \overline{SB} , trokut ABF je pravokutan. 1 bod

Iz Pitagorinog poučka slijedi

$$(R + x)^2 + R^2 = (R + y)^2. \quad (*) \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno, budući da je tangenta AE na kružnicu k_2 okomita na polumjer \overline{SE} kružnice k_2 , trokut SEF je pravokutan. 1 bod

Ponovno primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Oduzimanjem (*) od ove jednakosti dobivamo $R + x = 2y$. 2 boda

Uvrštavanjem u (*) dobivamo da je $3y = 2R$, tj. $\frac{y}{R} = \frac{2}{3}$, 1 bod

pa je traženi omjer jednak $|AF| : |AB| = (R + y) : R = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. 1 bod

Zadatak A-1.5.

Za prirodni broj n kažemo da je tablica s tri retka i n stupaca *čarobna* ako postoji prirodni broj k , $1 \leq k \leq n$, takav da se

- u prvom retku nalaze redom brojevi $1, 2, \dots, n$,
- u drugom retku nalaze redom brojevi $k, k + 1, \dots, n, 1, 2, \dots, k - 1$,
- u trećem retku nalaze brojevi od 1 do n u takvom poretku da su zbrojevi triju brojeva u svakom stupcu međusobno jednaki.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji čarobna tablica i za svaki takav n odredi koliko ima čarobnih tablica.

Rješenje.

Zbroj svih brojeva u čarobnoj tablici je $3 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. 2 boda

Budući da je u svakom od n stupaca zbroj jednak, taj zbroj iznosi $3 \cdot \frac{n+1}{2}$. 1 bod

Taj zbroj mora biti cijeli broj, pa je $n + 1$ paran, odnosno n mora biti neparan. 1 bod

Zapišimo $n = 2m + 1$. Zbroj u svakom stupcu mora biti jednak $3 \cdot \frac{n+1}{2} = 3m + 3$.

Budući da je najveći broj koji se upisuje $2m + 1$, zbroj $1 + k$ mora iznositi barem $3m + 3 - (2m + 1) = m + 2$, odnosno vrijedi $k \geq m + 1$. 2 boda

Analogno, u zadnjem stupcu, $(2m + 1) + (k - 1)$ je najviše $3m + 2$, odnosno $k \leq m + 2$. Slijedi da je $m + 1 \leq k \leq m + 2$, tj. $k = m + 1$ ili $k = m + 2$. 2 boda

Ako je $k = m + 1$, zbrojevi elemenata u prva dva retka su uzastopni prirodni brojevi (redom $m + 2, m + 4, \dots, 3m, 3m + 2, m + 3, m + 5, \dots, 3m - 1, 3m + 1$, tj. svi od $m + 2$ do $3m + 2$), pa je očigledno moguće popuniti treći redak tako da tablica bude čarobna. 1 bod

Isti argument vrijedi za $k = m + 2$ jer su zbrojevi elemenata u prva dva retka uzastopni prirodni brojevi (također svi od $m + 2$ do $3m + 2$). 1 bod

Čarobna tablica postoji ako i samo ako je n neparan i za svaki neparan prirodni broj n postoje dvije čarobne tablice.

Napomena: Umjesto korištenja zaključka da su zbrojevi u prva dva reda uzastopni prirodni brojevi, učenik može pokazati da za $k = m + 1$ i $k = m + 2$ postoje čarobne tablice eksplicitnim konstrukcijama:

1	2	...	m	$m + 1$	$m + 2$...	$2m$	$2m + 1$
$m + 1$	$m + 2$...	$2m$	$2m + 1$	1	...	$m - 1$	m
$2m + 1$	$2m - 1$...	3	1	$2m$...	4	2

1	2	...	m	$m + 1$	$m + 2$...	$2m$	$2m + 1$
$m + 2$	$m + 3$...	$2m + 1$	1	2	...	m	$m + 1$
$2m$	$2m - 2$...	2	$2m + 1$	$2m - 1$...	3	1

Konstrukcija svake tablice nosi po 1 bod.

Napomena: Učenik može zaključiti da n mora biti neparan i na sljedeći način. Ako je $n = 2m$ paran, zbrojevi u prva dva retka iznose $1 + k, 2 + (k + 1), \dots, (2m - k - 1) + 2m, (2m - k) + 1, \dots, 2m + (k - 1)$, tj. $k + 1, k + 3, \dots, 4m - k - 1, 2m - k + 1, \dots, 2m + k - 1$. Svi ti zbrojevi su iste parnosti, a dodavanjem brojeva od 1 do $2m$ ne mogu ostati iste parnosti, pa ne mogu svi biti jednaki.

Dokaz da n mora biti neparan nosi 4 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

27. veljače 2015.

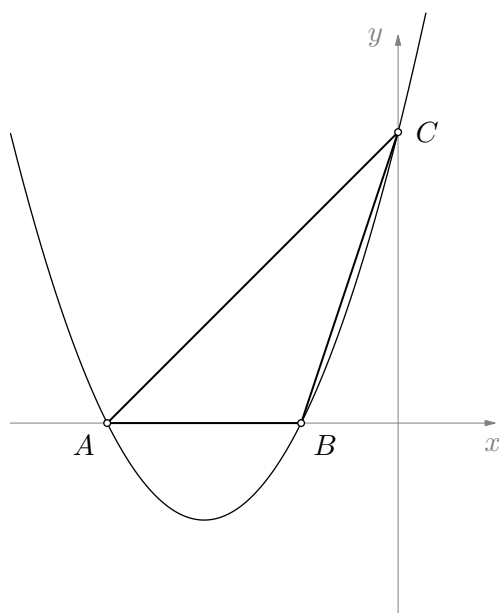
AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva takve da površina trokuta čiji su vrhovi točke u kojima parabola $y = x^2 + ax + b$ siječe koordinatne osi iznosi 3.

Rješenje.

Neka su A i B sjecišta parabole s x -osi, a C sjecište s y -osi.



Tada je $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$ pri čemu su x_1, x_2 nultočke funkcije $f(x) = x^2 + ax + b$ i vrijedi $|AB| = |x_1 - x_2|$.

1 bod

Prema Vièteovim formulama slijedi

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a^2 - 4b, \quad \text{tj.} \quad |AB| = \sqrt{a^2 - 4b}.$$

2 boda

Točka C ima koordinate $(0, b)$, pa duljina visine trokuta ABC iznosi $|b|$.

1 bod

Površina trokuta ABC je

$$3 = \frac{\sqrt{a^2 - 4b} \cdot |b|}{2},$$

iz čega slijedi $(a^2 - 4b) \cdot b^2 = 36$.

1 bod

Budući da b^2 dijeli broj 36, slijedi da je $b^2 \in \{1, 4, 9, 36\}$.

1 bod

Razlikujemo četiri slučaja:

1. Ako je $b^2 = 1$, onda je $a^2 - 4b = 36$. Iz $b = -1$ slijedi $a^2 = 40$, a iz $b = 1$ slijedi $a^2 = 32$, pa u ovom slučaju nema rješenja. 1 bod
2. Ako je $b^2 = 4$, onda je $a^2 - 4b = 9$. Iz $b = -2$ slijedi $a^2 = 1$, a iz $b = 2$ slijedi $a^2 = 17$, pa su u ovom slučaju rješenja $(-1, -2)$ i $(1, -2)$. 1 bod
3. Ako je $b^2 = 9$, onda je $a^2 - 4b = 4$. Iz $b = -3$ slijedi $a^2 = -8$, a iz $b = 3$ slijedi $a^2 = 16$, pa su u ovom slučaju rješenja $(-4, 3)$ i $(4, 3)$. 1 bod
4. Ako je $b^2 = 36$, onda je $a^2 - 4b = 1$. Iz $b = -6$ slijedi $a^2 = -23$, a iz $b = 6$ slijedi $a^2 = 25$, pa su u ovom slučaju rješenja $(-5, 6)$ i $(5, 6)$. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Odredi sve trojke (a, b, c) realnih brojeva za koje vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{i} \quad (2b - 2a - c)a \geq \frac{1}{2}.$$

Prvo rješenje.

Neka su a, b i c takvi da vrijede zadani uvjeti.

Tada je

$$(2b - 2a - c)a \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Množenjem nejednakosti sa 2 i prebacivanjem članova na jednu stranu dobivamo

$$0 \geq a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 4a^2 + 2ac. \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi da je

$$0 \geq a^2 + 2ac + c^2 + b^2 - 4ab + 4a^2,$$

odnosno

$$0 \geq (a + c)^2 + (b - 2a)^2. \quad 4 \text{ boda}$$

Budući da je $(a + c)^2 \geq 0$ i $(b - 2a)^2 \geq 0$, vrijedi

$$0 \leq (a + c)^2 + (b - 2a)^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, $(a + c)^2 + (b - 2a)^2 = 0$, iz čega slijedi da je $c = -a$ i $b = 2a$ 2 boda

Iz uvjeta $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ slijedi

$$a^2 + 4a^2 + a^2 = 1, \quad \text{tj.} \quad a^2 = \frac{1}{6}. \quad 1 \text{ bod}$$

Tražene trojke su: $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ i $(a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju uvrstimo prvi uvjet u nejednakost i prebacimo sve na jednu stranu:

$$0 \geq a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 4a^2 + 2ac. \quad 1 \text{ bod}$$

Promotrimo kvadratnu funkciju

$$f(x) = 5x^2 + (2c - 4b)x + (b^2 + c^2). \quad 1 \text{ bod}$$

Za diskriminantu vrijedi

$$D = (2c - 4b)^2 - 20(b^2 + c^2) = -4(b^2 + 4bc + 4c^2) = -4(b + 2c)^2 \leq 0, \quad 2 \text{ boda}$$

pa je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. 1 bod

Budući da nejednakost kaže da je $0 \geq f(a)$, slijedi da je $f(a) = 0$. 1 bod

Dakle, $f(x)$ ima dvostruku nultočku, pa je $D = 0$, tj. $b = -2c$. 1 bod

i ta nultočka je a , pa je prema formuli za rješenja kvadratne jednadžbe

$$a = \frac{4b - 2c}{10} = \frac{-8c - 2c}{10} = -c. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz uvjeta $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ slijedi

$$c^2 + 4c^2 + c^2 = 1, \quad \text{tj.} \quad c^2 = \frac{1}{6}. \quad 1 \text{ bod}$$

Tražene trojke su: $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ i $(a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Odredi sve četvorke (a, b, c, d) prirodnih brojeva takve da je

$$a^3 = b^2, \quad c^5 = d^4 \quad \text{i} \quad a - c = 9.$$

Rješenje.

Brojevi a i b moraju imati iste proste faktore. Neka je p neki njihov prosti faktor koji se u a pojavljuje s eksponentom k , a u b s eksponentom l . Tada je $p^{3k} = p^{2l}$, odnosno $3k = 2l$, iz čega slijedi da je k paran broj. 2 boda

Budući da to vrijedi za sve proste faktore p zaključujemo da je a potpun kvadrat, tj. $a = n^2$ za neki $n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Analogno zaključujemo da je $c = m^4$ za neki $m \in \mathbb{N}$. 2 boda

Slijedi

$$9 = a - c = n^2 - m^4 = (n - m^2)(n + m^2). \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je $n + m^2 > 0$ slijedi $n - m^2 > 0$. 1 bod

Kako je m prirodan broj, vrijedi $n - m^2 < n + m^2$. Zbog $n + m^2 > 0$, jedina je mogućnost $n + m^2 = 9$, $n - m^2 = 1$ 1 bod

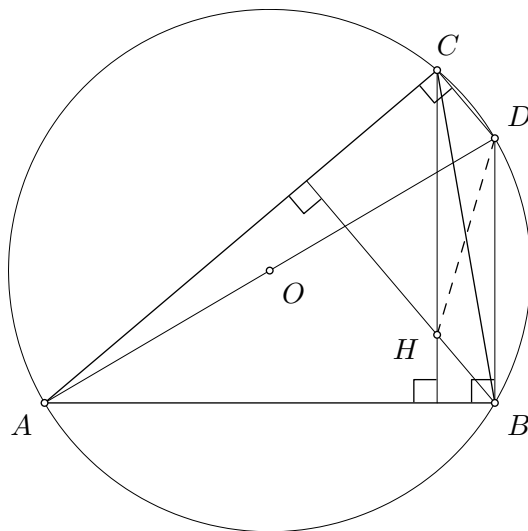
odakle slijedi $m = 2$ i $n = 5$. 1 bod

Slijedi $a = 5^2 = 25$, $b = 5^3 = 125$, $c = 2^4 = 16$, $d = 2^5 = 32$. 1 bod

Zadatak A-2.4.

Neka je O središte opisane kružnice, a H ortocentar trokuta ABC . Pravac AO siječe opisanu kružnicu u točki D . Dokaži da pravac HD prolazi polovištem stranice \overline{BC} .

Rješenje.



Budući da se dijagonale paralelograma raspolavljaju dovoljno je dokazati da je $HBDC$ paralelogram. 2 boda

Dužina \overline{AD} je promjer opisane kružnice, pa je prema Talesovom poučku BD okomito na AB . 2 boda

Pravac CH je okomit na AB , pa je $CH \parallel DB$. 3 boda

Analogno, CD i BH su okomiti na AC i $BH \parallel CD$. Zato je $HBDC$ paralelogram. 3 boda

Zadatak A-2.5.

Na matematičkom natjecanju zadana su 4 teška i 8 laganih zadataka. Na natjecanju sudjeluje n učenika, a svaki je učenik ispravno riješio točno 11 od 12 zadataka.

Za svaki par teškog i laganog zadatka određen je broj učenika koji su ispravno riješili oba zadatka i zbroj svih tih 32 brojeva je 256. Odredi n .

Prvo rješenje.

Neka je a broj učenika koji nisu riješili lagani zadatak, a b broj učenika koji nisu riješili teški zadatak. 1 bod

Svaki učenik koji nije riješio lagani zadatak riješio je 4 teška i 7 laganih, dakle riješio je 28 različitih parova laganih i teških zadataka. 2 boda

Svaki učenik koji nije riješio teški zadatak riješio je 3 teška i 8 laganih, dakle riješio je 24 različita para laganih i teških zadataka. 2 boda

Iz uvjeta zadatka slijedi $28a + 24b = 256$, odnosno $7a + 6b = 64$. 2 boda

Broj a mora biti paran, a $7 \cdot 9 + 6 > 64$, pa broj a može biti samo jedan od brojeva 2, 4, 6 ili 8. 1 bod

Za $a = 2$ slijedi $6b = 40$, za $a = 4$ slijedi $6b = 36$, za $a = 6$ slijedi $6b = 22$, a za $a = 8$ slijedi $6b = 8$. 1 bod

Dakle, jedino moguće rješenje je $a = 4$, $b = 6$, odnosno $n = 10$. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo teške zadatke T_1, \dots, T_4 , a lagane zadatke L_1, \dots, L_8 . Neka je

$x_i =$ broj učenika koji nisu ispravno riješili T_i ,

$y_i =$ broj učenika koji nisu ispravno riješili L_i . 1 bod

Tvrdnja da je svaki učenik ispravno riješio točno 11 zadataka znači da je

$$n = x_1 + \dots + x_4 + y_1 + \dots + y_8. \quad (*) \quad 2 \text{ boda}$$

Broj učenika koji su ispravno riješili T_i i L_j je $n - x_i - y_j$. 1 bod

Svaki T_i se pojavljuje u 8 parova, a svaki L_j u 4 para, pa vrijedi 1 bod

$$256 = 32n - 8(x_1 + \dots + x_4) - 4(y_1 + \dots + y_8) \quad 2 \text{ boda}$$

$$64 = 8n - 2(x_1 + \dots + x_4) - (y_1 + \dots + y_8).$$

Zbog (*) imamo

$$64 = 8n - n - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 7n - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da je $0 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq n$, slijedi

$$6n \leq 64 \leq 7n, \quad 1 \text{ bod}$$

odakle zaključujemo da je $n = 10$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC .

Ako je $|AI| = |BC|$ i $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC$, odredi kutove trokuta ABC .

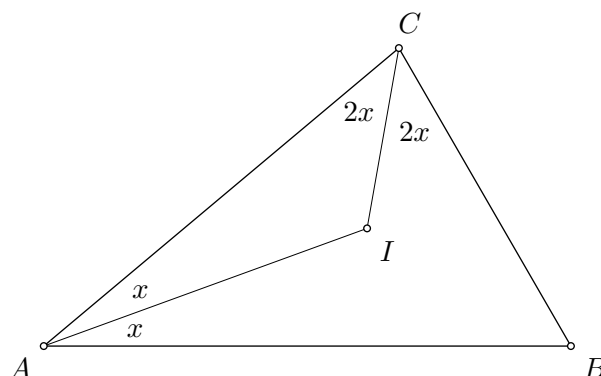
Napomena: Primjena poučka o sinusima na samo jedan ili na više od dva trokuta ABC , AIC , ADI , BCD (i slično) bez jasne ideje kako povezati dobivene jednakosti s uvjetima u zadatku donosi 2 boda od 5 bodova predviđena za taj dio zadatka.

Prvo rješenje.

Neka je $x = \sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC$.

Tada je $\sphericalangle BCI = \sphericalangle ACI = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = 2x$.

2 boda



Slijedi da je $\sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle CAB - \sphericalangle ACB = 180^\circ - 2x - 4x = 180^\circ - 6x$.

1 bod

Primijenimo li poučak o sinusima na trokute ABC i AIC dobivamo

$$\frac{|BC|}{\sin 2x} = \frac{|AC|}{\sin(180^\circ - 6x)} \quad \text{i} \quad \frac{|AI|}{\sin 2x} = \frac{|AC|}{\sin(180^\circ - 3x)}.$$

Budući da je $|AI| = |BC|$, slijedi da je $\sin(180^\circ - 6x) = \sin(180^\circ - 3x)$.

5 bodova

Budući da je $0 < 3x < 6x < 180^\circ$, jedina mogućnost je da vrijedi $3x + 6x = 180^\circ$.

1 bod

Dakle, $x = 20^\circ$ i kutovi u trokutu ABC iznose $\sphericalangle BAC = 2x = 40^\circ$, $\sphericalangle CBA = 3x = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC = 80^\circ$.

1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $x = \sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC$.

Neka je D sjecište simetrale kuta ACB sa stranicom \overline{AB} .

Budući da je $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = 2x$, slijedi da je $|AD| = |DC|$. 2 boda

Možemo izračunati $\sphericalangle AID = \sphericalangle ACI + \sphericalangle IAC = 3x$ i $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DAC = 4x$.

Primijenimo li poučak o sinusima na trokute ADI i BCD dobivamo

$$\frac{|AD|}{\sin 3x} = \frac{|AI|}{\sin(180^\circ - 4x)} \quad \text{i} \quad \frac{|DC|}{\sin \sphericalangle CBA} = \frac{|BC|}{\sin(4x)}.$$

Budući da je $\sin(180^\circ - 4x) = \sin 4x$, $|AI| = |BC|$ i $|AD| = |CD|$ slijedi da je $\sin \sphericalangle CBA = \sin 3x$. 5 bodova

Kutovi u trokutu BCD su $\sphericalangle CBA$, $2x$ i $4x$, pa je nemoguće da je $180^\circ - 3x = \sphericalangle CBA$. Zaključujemo da je $\sphericalangle CBA = 3x$. 1 bod

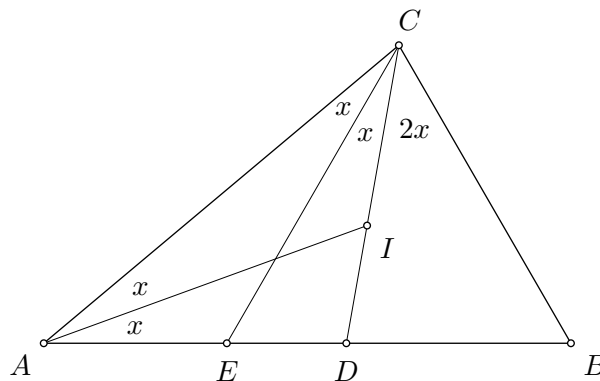
Slijedi da je $180^\circ = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle BDC = 3x + 2x + 4x$. 1 bod

Dakle, $180^\circ = 9x$, tj. $x = 20^\circ$. Slijedi da je $\sphericalangle BAC = 2x = 40^\circ$, $\sphericalangle CBA = 3x = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC = 80^\circ$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka je $x = \sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC$.

Neka je D sjecište simetrale kuta ACB sa stranicom \overline{AB} .



Budući da je $\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB$, slijedi $|DC| = |AD|$. 2 boda

Neka je E sjecište simetrale kuta ACD sa stranicom \overline{AD} .

Budući da je ACD jednakokratan trokut, vrijedi $|CE| = |AI| = |BC|$. 3 boda

Dakle, trokut BCE je jednakokratan, pa vrijedi

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle CEB = \sphericalangle ACE + \sphericalangle EAC = 3x. \quad 2 \text{ boda}$$

S druge strane, $\sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle CAB - \sphericalangle ACB = 180^\circ - 2x - 4x$. 1 bod

Na dva načina smo izrazili $\sphericalangle CBA$, tj. $3x = 180^\circ - 6x$, tj. $x = 20^\circ$. 1 bod

Slijedi da je $\sphericalangle BAC = 2x = 40^\circ$, $\sphericalangle CBA = 3x = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC = 80^\circ$. 1 bod

Četvrto rješenje.

Kao u prethodnom rješenju označimo točku D i zaključimo da je $|DC| = |AD|$, 2 boda

te označimo točku E i dokažemo da je $|CE| = |AI| = |BC|$. 3 boda

Budući da je CE simetrala kuta, slijedi $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DCE = 3x = \sphericalangle BEC$.
Zato je $|BE| = |BC|$. 2 boda

Zaključujemo da je trokut BCE jednakostraničan, pa je $3x = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CBE = 60^\circ$. 2 boda

Slijedi da je $\sphericalangle BAC = 2x = 40^\circ$, $\sphericalangle CBA = 3x = 60^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC = 80^\circ$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Za realni broj x , neka $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x .

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$11 \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 9x.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo $x \in \mathbb{R}$ kao $x = n + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < 1$.

Razlikujemo dva slučaja: $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$.

1. Za $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} 11n + n &= 9n + 9\alpha, & 2 \text{ boda} \\ n &= 3\alpha, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $0 \leq n < \frac{3}{2}$, odnosno $n \in \{0, 1\}$. 2 boda

Za $n = 0$ slijedi $\alpha = 0$ i $x = 0$. Za $n = 1$ slijedi $\alpha = \frac{1}{3}$ i $x = \frac{4}{3}$. 1 bod

2. Za $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} 11n + n + 1 &= 9n + 9\alpha, & 2 \text{ boda} \\ n &= 3\alpha - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \leq n < 3 - \frac{1}{3}$, odnosno $n = 2$. 2 boda

Slijedi $\alpha = \frac{7}{9}$ i $x = \frac{25}{9}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Budući da su $\lfloor x \rfloor$ i $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ cijeli brojevi, slijedi da je $9x$ cijeli broj.

Zato broj x možemo zapisati u obliku

$$x = a + \frac{1}{9}b, \quad \text{pri čemu je } a = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ i } b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}. \quad 2 \text{ boda}$$

Početna jednačba prelazi u

$$\begin{aligned} 11 \left\lfloor a + \frac{1}{9}b \right\rfloor + \left\lfloor a + \frac{1}{9}b + \frac{1}{2} \right\rfloor &= 9 \left(a + \frac{1}{9}b \right), \\ 11a + \left\lfloor a + \frac{1}{9}b + \frac{1}{2} \right\rfloor &= 9a + b, \\ \left\lfloor a + \frac{b}{9} + \frac{1}{2} \right\rfloor &= b - 2a. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Razlikujemo dva slučaja: $\frac{b}{9} + \frac{1}{2} < 1$ i $\frac{b}{9} + \frac{1}{2} \geq 1$.

Ako je $\frac{b}{9} + \frac{1}{2} < 1$, tj. $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, onda je $a = b - 2a$ i $b = 3a$, 1 bod

iz čega slijedi $(a, b) = (0, 0)$ ili $(a, b) = (1, 3)$. 2 boda

Ako je $\frac{b}{9} + \frac{1}{2} \geq 1$, tj. $b \in \{5, 6, 7, 8\}$, onda je $a + 1 = b - 2a$ i $b = 3a + 1$, 1 bod

iz čega slijedi $(a, b) = (2, 7)$. 2 boda

Konačno, rješenja dane jednačbe su $0 + \frac{0}{9}$, $1 + \frac{3}{9}$, $2 + \frac{7}{9}$, tj. $x \in \{0, \frac{4}{3}, \frac{25}{9}\}$.

Zadatak A-3.3.

Neka je n prirodni broj veći od 1 takav da su $2n - 1$ i $3n - 2$ kvadrati prirodnih brojeva.

Dokaži da je broj $10n - 7$ složen.

Rješenje.

Označimo $a^2 = 2n - 1$ i $b^2 = 3n - 2$. Tada je

$$10n - 7 = 4(3n - 2) - (2n - 1) = 4b^2 - a^2 \quad 2 \text{ boda}$$

$$10n - 7 = (2b - a)(2b + a). \quad 1 \text{ bod}$$

Ako su $2b - a$ i $2b + a$ veći od 1, onda je $10n - 7$ složen.

Uočimo da je $2b - a < 2b + a$ pa pretpostavimo da je $2b - a = 1$. 2 boda

Tada je $2b + a = 10n - 7$. Oduzimanjem jednakosti slijedi $2a = 10n - 8$, odnosno $a = 5n - 4$. 2 boda

$$\text{Uvrštavanjem slijedi } 2n - 1 = (5n - 4)^2, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{Dakle dobivamo kvadratnu jednačbu } 0 = 25n^2 - 42n + 17$$

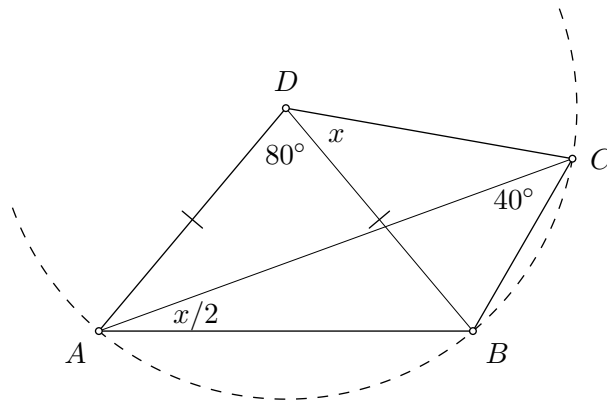
čija rješenja su $n_1 = 1$, $n_2 = 17/25$. 1 bod

Budući da je $n > 1$, dobivamo kontradikciju. 1 bod

Zadatak A-3.4.

U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD = 50^\circ$, $\sphericalangle ADB = 80^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Ako je $\sphericalangle DBC = 30^\circ + \sphericalangle BDC$, izračunaj $\sphericalangle BDC$.

Rješenje.



Budući da je

$$\sphericalangle ABD = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ = \sphericalangle BAD,$$

1 bod

trokut ABD je jednakokratan i vrijedi $|AD| = |BD|$.

1 bod

Budući da je $|AD| = |BD|$ i $\sphericalangle ADB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$, točka D je središte kružnice opisane trokutu ABC .

4 boda

Neka je $\sphericalangle BDC = x$. Budući da je kut BAC obodni kut nad tetivom \overline{BC} , a pripadni središnji kut je kut BDC vrijedi $\sphericalangle BAC = \frac{x}{2}$.

2 boda

Budući da je $\sphericalangle CBD = x + 30^\circ$, iz trokuta ABC slijedi

$$180^\circ = \frac{x}{2} + 50^\circ + x + 30^\circ + 40^\circ,$$

1 bod

$$\text{tj. } x = 40^\circ.$$

1 bod

Zadatak A-3.5.

Marko ima $2n$ kartica ($n \in \mathbb{N}$), po dvije kartice sa svakim od brojeva $1, 2, \dots, n$. Kada ih je promiješao i složio jednu do druge u niz, primijetio je da se za svaki k iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ između dviju kartica s brojem k nalazi točno k drugih kartica.

Dokaži da je broj $n^2 + n$ djeljiv s 4.

Prvo rješenje.

Neka je i_k pozicija prvog pojavljivanja kartice s brojem k . Kartice s brojem k se tada nalaze na pozicijama i_k i $i_k + k + 1$. 2 boda

Zbrojimo li sve pozicije dobivamo

$$\sum_{k=1}^n (i_k + i_k + k + 1) = 1 + 2 + \dots + 2n \quad 3 \text{ boda}$$

$$2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2} = \frac{2n(2n+1)}{2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$2 \sum_{k=1}^n i_k = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Slijedi da je broj $\frac{3n^2-n}{2}$ paran, tj. $3n^2 - n$ je djeljiv s 4. 2 boda

Tada je i $4n^2 - (3n^2 - n) = n^2 + n$ djeljiv s 4. 2 boda

Napomena: Nakon zaključka $4 \mid 3n^2 - n$ učenik može dovršiti rješenje i promatranjem svih slučajeva $n = 4m + k$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Drugo rješenje.

Kažimo da je par (r, s) ($r, s \in \{1, 2, \dots, 2n\}$) *poseban* ako se na poziciji r nalazi kartica s brojem k , na poziciji s kartica s brojem l i kartica na poziciji s se nalazi između dvije kartice s brojem k . 2 boda

Za proizvoljne brojeve k i l (od 1 do n), promotrimo koliko ima posebnih parova (r, s) takvih da se na pozicijama r i s nalaze kartice s brojevima k i l (u bilo kojem poretku).

Neka se kartice s brojem k nalaze na pozicijama i_1 i i_2 , a kartice s brojem l nalaze na pozicijama j_1 i j_2 .

Razlikujemo tri slučaja.

1. Ako se obje kartice s brojem l nalaze između kartica s brojem k , tj. $i_1 < j_1 < j_2 < i_2$, onda imamo 4 posebna para (i_1, j_1) , (i_1, j_2) , (i_2, j_1) i (i_2, j_2) . Analogno, ako se obje kartice s brojem k nalaze između dvije kartice s brojem l , onda opet imamo 4 posebna para. 1 bod
2. Ako se točno jedna kartica s brojem l nalazi između kartica s brojem k , tj. bez smanjenja općenitosti ako pretpostavimo da je $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$, onda također imamo 4 posebna para (i_1, j_1) , (i_2, j_1) , (j_1, i_2) i (j_2, i_2) . 1 bod
3. Ako se nijedna kartica s brojem l ne nalazi između kartica s brojem k , te nijedna kartica s brojem k nije između kartica s brojem l , onda nema posebnih parova. 1 bod

Zaključujemo da je ukupan broj posebnih parova višekratnik broja 4. 2 boda

S druge strane, taj je broj jednak

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k = n^2 + n$$

jer za svaki broj k imamo dvije pozicije r na kojima se nalazi kartica s tim brojem, te k pozicija između njih koje možemo odabrati za s . 3 boda

Dakle, 4 dijeli $n^2 + n$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Neka je $a = \sqrt[2015]{2015}$ i neka je (a_n) niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geq 1$.

Postoji li prirodni broj n takav da je $a_n \geq 2015$?

Rješenje.

Takav prirodan broj ne postoji.

1 bod

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki prirodan broj n vrijedi $a_n < 2015$.

3 boda

Baza indukcije. Za $n = 1$, vrijedi $a = \sqrt[2015]{2015} < 2015$.

1 bod

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $a_n < 2015$.

Tada je

$$a_{n+1} = a^{a_n} < a^{2015} = 2015.$$

4 boda

Po principu matematičke indukcije slijedi da je $a_n < 2015$ za svaki prirodan broj n .

1 bod

Zadatak A-4.2.

Jedna stranica kvadrata leži na pravcu $y = 2x - 17$, a preostala dva vrha leže na paraboli $y = x^2$. Odredi površinu tog kvadrata.

Prvo rješenje.

Neka su $A_1(x_1, x_1^2)$ i $A_2(x_2, x_2^2)$ ($x_1 > x_2$) vrhovi kvadrata koji leže na paraboli $y = x^2$.

Budući da je pravac A_1A_2 paralelan pravcu $y = 2x - 17$, ti pravci imaju isti koeficijent smjera. Zato vrijedi

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = 2, \quad \text{tj.} \quad x_1 + x_2 = 2.$$

1 bod

Duljina stranice promatranog kvadrata iznosi

$$\begin{aligned} |A_1A_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 [1 + (x_1 + x_2)^2]} \\ &= \sqrt{5}(x_1 - x_2) \\ &= 2\sqrt{5}(1 - x_2), \end{aligned}$$

2 boda

a udaljenost točke A_2 od pravca $2x - y - 17 = 0$ iznosi

$$d(A_2, p) = \frac{|2 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_2^2 + (-17)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|x_2^2 - 2x_2 + 17|}{\sqrt{5}}.$$

2 boda

Budući da je udaljenost točke A_2 od pravca $2x - y - 17$ jednaka duljini stranice kvadrata slijedi

$$2\sqrt{5}(1 - x_2) = \frac{|x_2^2 - 2x_2 + 17|}{\sqrt{5}}, \quad 1 \text{ bod}$$

$$10(1 - x_2) = |x_2^2 - 2x_2 + 17|.$$

Izraz u apsolutnoj vrijednosti je pozitivan (jer je diskriminanta tog kvadratnog trinoma jednaka $2^2 - 4 \cdot 17 < 0$), pa slijedi

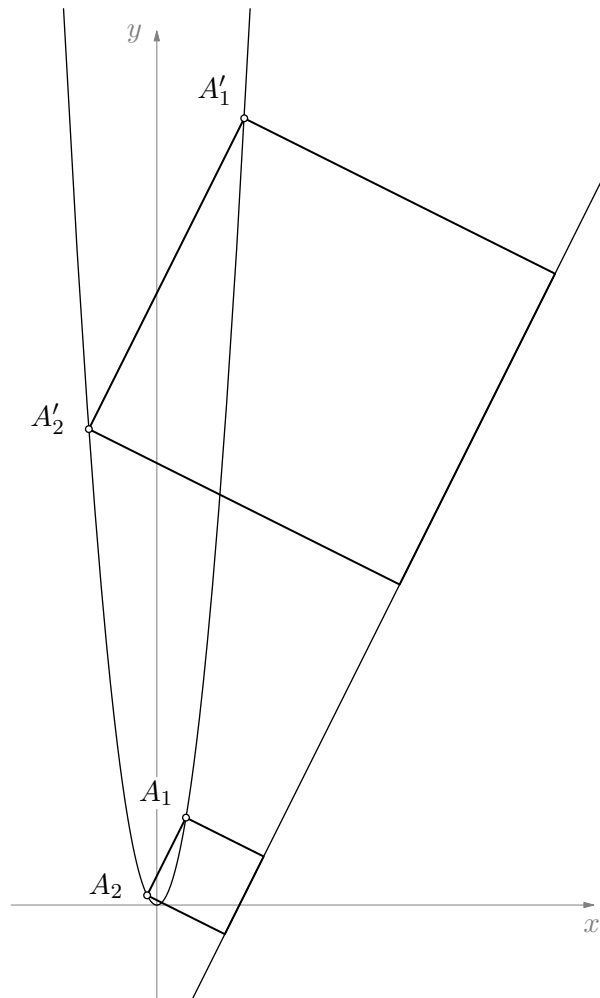
$$10(1 - x_2) = x_2^2 - 2x_2 + 17, \quad 1 \text{ bod}$$

$$x_2^2 + 8x_2 + 7 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su -1 i -7 . 1 bod

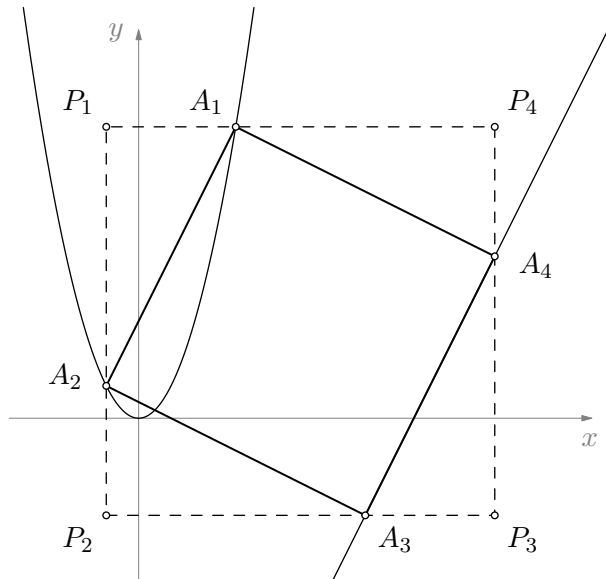
Ako je $x_2 = -1$, onda je $|A_1A_2| = 4\sqrt{5}$ i površina kvadrata je $P = 80$. 1 bod

Ako je $x_2 = -7$, onda je $|A_1A_2| = 16\sqrt{5}$ i površina kvadrata je $P = 1280$. 1 bod



Drugo rješenje.

Neka je $A_1A_2A_3A_4$ traženi kvadrat, pri čemu su točke A_1 i A_2 na paraboli $y = x^2$, a točke A_3 i A_4 na pravcu $y = 2x - 17$.



Neka su (x_i, y_i) koordinate točke A_i za $i = 1, 2, 3, 4$. Neka je $y_1 > y_2$ i neka je $y_4 > y_3$, kao na slici.

Povucimo paralele s x -osi kroz točke A_1 i A_3 , te paralele s y -osi kroz točke A_2 i A_4 . Presjeci tih parabola čine vrhove kvadrata $P_1P_2P_3P_4$. Pravokutni trokuti $A_1P_1A_2$, $A_2P_2A_3$, $A_3P_3A_4$ i $A_4P_4A_1$ su sukladni.

1 bod

Iskoristimo li sukladnost kateta tih pravokutnih trokuta i $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = 2x_3 - 17$ i $y_4 = 2x_4 - 17$ dobivamo

$$x_1 - x_2 = |A_1P_1| = |A_2P_2| = x_2^2 - 2x_3 + 17 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 = |A_1P_1| = |A_3P_3| = x_4 - x_3 \quad (2)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = |P_1A_2| = |P_3A_4| = 2x_4 - 2x_3 \quad (3)$$

$$x_3 - x_2 = |P_2A_3| = |P_3A_4| = 2x_4 - 2x_3 \quad (4) \quad 2 \text{ boda}$$

Iz jednadžbi (2) i (3) slijedi $x_1 + x_2 = 2$.

1 bod

Uvrstimo li $x_1 = 2 - x_2$ u (2) dobivamo $x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = 2x_3 - 2x_2$.

1 bod

Uvrstimo li $x_4 = 2x_3 - 2x_2$ u (4) dobivamo $x_2 = 3x_3 - 2x_4 = x_3 - 4 - 4x_2$, tj. $x_3 = 4 - 3x_2$.

1 bod

Konačno, uvrštavanjem $x_1 = 2 - x_2$ i $x_3 = 4 - 3x_2$ u (1) dobivamo

$$2 - x_2 - x_2 = x_2^2 - 2(4 - 3x_2) + 17, \quad \text{tj.} \quad x_2^2 + 8x_2 + 7 = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješenja ove jednadžbe su -1 i -7 .

1 bod

Ako je $x_2 = -1$, onda točka A_2 ima koordinate $(-1, 1)$, a točka A_1 ima koordinate $(3, 9)$. Tada je površina kvadrata $|AB|^2 = (3 + 1)^2 + (9 - 1)^2 = 80$.

1 bod

Ako je $x_2 = -7$, onda točka A_2 ima koordinate $(-7, 49)$, a točka A_1 ima koordinate $(9, 81)$. Tada je površina kvadrata $|AB|^2 = (9 + 7)^2 + (81 - 49)^2 = 1280$.

1 bod

Zadatak A-4.3.

Neka je n prirodni broj i neka su $a_0, a_1, \dots, a_{2n} \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ realni brojevi takvi da je

$$\operatorname{tg} a_k = 2^{k-n} \quad \text{za} \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Izračunaj zbroj $a_0 + a_1 + \dots + a_{2n}$.

Rješenje.

Primijetimo da je $\operatorname{tg} a_k = 2^{k-n} = \frac{1}{2^{(2n-k)-n}} = \frac{1}{\operatorname{tg} a_{2n-k}}$ za $k = 0, 1, \dots, n-1$. 1 bod

Zapišimo traženi zbroj na sljedeći način

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{2n} = (a_0 + a_{2n}) + (a_1 + a_{2n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_{n+1}) + a_n. \quad \text{2 boda}$$

Budući da je $\operatorname{tg} a_k > 0$ vrijedi $a_k > 0$, tj. $a_k \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ za $k = 0, 1, \dots, 2n$. 1 bod

Uočimo da za $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ za koje je $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$ vrijedi $x + y = \frac{\pi}{2}$. 1 bod

Naime,

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

a kako su x i y u intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ vrijedi $y = \frac{\pi}{2} - x$, odnosno $x + y = \frac{\pi}{2}$. 2 boda

Zato vrijedi $a_k + a_{2n-k} = \frac{\pi}{2}$ za sve $k = 0, 1, \dots, n-1$. 1 bod

Budući da je $\operatorname{tg} a_n = 2^{n-n} = 1$, vrijedi $a_n = \frac{\pi}{4}$. 1 bod

Zato je tražena suma jednaka

$$(a_0 + a_{2n}) + (a_1 + a_{2n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_{n+1}) + a_n = n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = (2n+1) \frac{\pi}{4}. \quad \text{1 bod}$$

Napomena: U rješenju se koristi sljedeća tvrdnja: ako je $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = 1$ i $a, b \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, onda je $a + b = \frac{\pi}{2}$.

Ako učenik tu tvrdnju koristi bez dokaza ili ako je napisao pogrešan argument za tu tvrdnju, npr. koristeći formulu

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

koja se ne može primijeniti u ovoj situaciji, treba izgubiti 2 boda za taj dio zadatka.

Zadatak A-4.4.

Za prirodan broj kažemo da je *zvrkast* ako u dekadskom zapisu ima 100 znamenaka i ako uklanjanjem bilo koje njegove znamenke nastaje 99-znamenkasti broj djeljiv sa 7.

Koliko ima zvrkastih prirodnih brojeva?

Rješenje.

Neka je $x = \overline{a_{99}a_{98} \dots a_1a_0}$, te neka je x_k broj koji je dobiven uklanjanjem znamenke a_k u broju x .

Ako su brojevi x_k i x_{k+1} djeljivi sa 7 i njihova razlika $x_{k+1} - x_k$ je djeljiva sa 7.

Budući da se brojevi x_k i x_{k+1} razlikuju samo u jednoj znamenici, njihova razlika je

$$x_k - x_{k+1} = 10^k(a_{k+1} - a_k). \quad 1 \text{ bod}$$

No, brojevi 7 i 10 su relativno prosti, pa zaključujemo da 7 dijeli $a_{k+1} - a_k$, tj. a_{k+1} i a_k daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7 za sve $k = 0, 1, \dots, 98$. 1 bod

Zaključujemo da je broj x zvrkast samo ako mu sve znamenke daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7. 1 bod

Svaki 100-znamenkasti broj kojem su znamenke 0 ili 7, a počinje sa $\overline{77}$, je očito zvrkast. 1 bod

Neka je p broj koji se sastoji od 99 jedinica, tj.

$$p = \overline{11 \dots 1} = \frac{10^{99} - 1}{9}.$$

Brojevi 10^n za $n = 1, 2, \dots$ redom pri dijeljenju sa 7 daju ostatke 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, \dots koji se periodično ponavljaju s periodom 6. Zato broj 10^{99} daje isti ostatak pri dijeljenju sa 7 kao 10^3 , tj. ostatak 6. Dakle, $10^{99} - 1$ daje ostatak 5, pa p nije djeljiv sa 7. 2 boda

To povlači i da za $k = 2, 3, 4, 5, 6$ broj $k \cdot p$ nije djeljiv sa 7.

Za $k = 1, 2$, neka je S_k skup svih 99-znamenkastih brojeva kojima sve znamenke daju ostatak k pri dijeljenju sa 7.

Razlika bilo koja dva elementa $x, y \in S_k$ je djeljiva sa 7. Budući da p i $2p$ nisu djeljivi sa 7, nijedan element skupa S_1 ili S_2 nije djeljiv sa 7.

Zaključujemo da je broj $x = \overline{a_{99}a_{98} \dots a_1a_0}$ zvrkast samo ako mu sve znamenke daju ostatak 0 pri dijeljenju sa 7, tj. samo ako je $a_i \in \{0, 7\}$ za sve indekse i . 2 boda

Znamenka a_{99} ne smije biti nula jer inače x ne bi bio 100-znamenkasti broj, a ni a_{98} ne smije biti nula jer x_{99} ne bi bio 99-znamenkasti broj. 1 bod

Budući da za sve preostale znamenke a_0, \dots, a_{97} imamo dvije mogućnosti (0 ili 7), ukupan broj zvrkastih brojeva je 2^{98} . 1 bod

Zadatak A-4.5.

Ukrug je poredano konačno mnogo realnih brojeva. Svaki broj je obojan u crveno, bijelo ili plavo. Svaki crveni broj dvaput je manji od zbroja dvaju njemu susjednih brojeva, svaki bijeli broj jednak je zbroju dvaju njemu susjednih brojeva, a svaki plavi broj je dvaput veći od zbroja dvaju njemu susjednih brojeva. Neka je b zbroj svih bijelih brojeva, a p zbroj svih plavih brojeva, pri čemu su oba zbroja različita od 0.

Odredi omjer $\frac{b}{p}$.

Rješenje.

Neka su redom x_1, x_2, \dots, x_n zadani brojevi. Radi jednostavnijeg zapisa označimo $x_{n+1} = x_1$ i $x_{-1} = x_n$.

Neka je c zbroj svih crvenih brojeva, a $S = c + b + p$ zbroj svih brojeva.

Ako je x_i crveni broj, onda je $x_{i-1} + x_{i+1} = 2x_i$.

Ako je x_i bijeli broj, onda je $x_{i-1} + x_{i+1} = x_i$.

Ako je x_i crveni broj, onda je $x_{i-1} + x_{i+1} = \frac{1}{2}x_i$.

Ovako smo uvjete iz zadatka napisali kao jednakosti koje povezuje tri uzastopna broja. 2 boda

Promotrimo zbroj svih tih jednakosti. 2 boda

Zbrojimo li sve ove jednakosti (za $i = 1, 2, \dots, n$) s desne strane jednakosti ćemo dobiti

$$2c + b + \frac{1}{2}p, \quad 2 \text{ boda}$$

dok ćemo s lijeve strane dobiti

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1} + \sum_{i=1}^n x_{i+1} = 2S = 2c + 2b + 2p. \quad 2 \text{ boda}$$

Dakle, $2c + 2b + 2p = 2c + b + \frac{1}{2}p$, 1 bod

tj. $\frac{b}{p} = -\frac{3}{2}$. 1 bod