DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Točan broj je $10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica, vrijedi $x = 2 \cdot a$ i $y = a$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot a + a = 21 \cdot a$.

U pogrešnom broju $10 \cdot y + x$ slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot a + 2 \cdot a = 12 \cdot a$.

Dalje slijedi da je $288 \cdot (21 \cdot a - 12 \cdot a) = 7\,776$

$$21 \cdot a - 12 \cdot a = 7776 : 288$$

$$9 \cdot a = 27$$

$$a = 3$$

Traženi broj je $21 \cdot a = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Drugi način:

Točan broj je $\overline{xy} = 10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica, vrijedi $x = 2 \cdot y$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot y + y = 21 \cdot y$.

U pogrešnom broju (broju zamijenjenih znamenaka) je $\overline{yx} = 10 \cdot y + x$ pa slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot y + 2 \cdot y = 12 \cdot y$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $288 \cdot \overline{yx} + 7776 = 288 \cdot \overline{xy}$ odnosno $288 \cdot 12 \cdot y + 7776 = 288 \cdot 21 \cdot y$.

Rješavanjem te jednadžbe redom dobivamo $3456 \cdot y + 7776 = 6048 \cdot y$ odnosno $2592 \cdot y = 7776$ odakle je $y = 3$ odnosno $x = 6$.

Traženi broj je $21 \cdot y = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Treći način:

Parovi dvoznamenkastih brojeva kojima je jedna znamenka dva puta veća od druge su: 12 i 21, 24 i 42, 36 i 63 te 48 i 84. Točan broj je onaj u paru kojemu je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica.

Prema uvjetima zadatka vrijedi da je:

$21 \cdot 288 - 12 \cdot 288 = (21 - 12) \cdot 288 = 9 \cdot 288 = 2\,592$,

$42 \cdot 288 - 24 \cdot 288 = (42 - 24) \cdot 288 = 18 \cdot 288 = 5\,184$,

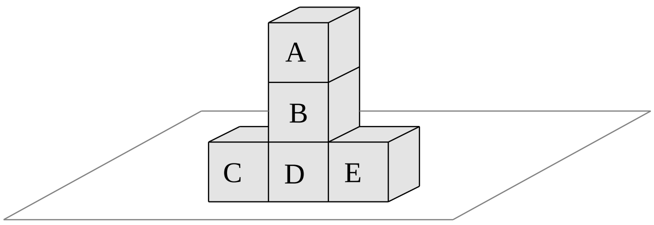
$63 \cdot 288 - 36 \cdot 288 = (63 - 36) \cdot 288 = 27 \cdot 288 = 7\,776$,

$84 \cdot 288 - 48 \cdot 288 = (84 - 48) \cdot 288 = 36 \cdot 288 = 10\,368$.

Budući da je u trećem slučaju razlika umnožaka jednaka 7 776, traženi broj je 63.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

2. Promotrimo sliku:



Kocka A ima 5 slobodnih strana. Zbroj će biti maksimalan kada je strana s brojem 1 nevidljiva (tom stranom je kocka A prislonjena na kocku B) i iznosi $6 + 2 + 5 + 3 + 4 = 20$.

Kocka D ima dvije slobodne strane, a zbroj bilo koje od kombinacije je 7.

Kocke B, C i E imaju po 4 slobodne strane.

Kod kocke B slobodna su dva para nasuprotnih strana pa je maksimalan zbroj $7 + 7 = 14$.

Kod kocaka C i E slobodan je po jedan par nasuprotnih strana i još dvije strane. Maksimalan zbroj će se dobiti ako se vide brojevi 5 i 6, a skrivene su strane na kojima su brojevi 1 i 2 te zbroj tada iznosi $5 + 6 + 7 = 18$.

Maksimalan zbroj je $20 + 7 + 14 + 2 \cdot 18 = 77$.

3. Prvi način:

Promatramo skup prirodnih brojeva manjih od 2016 odnosno skup {1, 2, 3, 4, …, 2015}.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 brojeva djeljivih brojem 2, 671 broj djeljiv brojem 3 i 335 brojeva djeljivih brojem 6 odnosno djeljivih istovremeno brojevima 2 i 3.

Dakle, među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 + 671 – 335 = 1343 broja djeljiva brojem 2 ili brojem 3 (moramo oduzeti 335 jer smo brojeve djeljive brojevima 2 i 3 brojali dvaput).

Brojeva koji su djeljivi brojevima 2 i 5 ima 201, brojeva djeljivih brojevima 3 i 5 ima 134, dok brojeva djeljivih brojem 6 (dakle, brojevima 2 i 3) i 5 ima 67.

Slijedi da brojeva koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, ali i brojem 5, ima 201 + 134 – 67 = 268 (one koji su djeljivi brojevima 2 i 3 opet smo brojali dvaput pa moramo oduzeti 67).

Konačno, brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima 1343 – 268 = 1075.

Drugi način:

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2014 : 2 = 1007 djeljivih brojem 2. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 i koji su djeljivi brojem 2, oni koji su djeljivi brojem 5 ujedno su djeljivi brojem 10, a ima ih 2010 : 10 = 201. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2, ali nisu brojem 5 ima 1007 – 201 = 806.

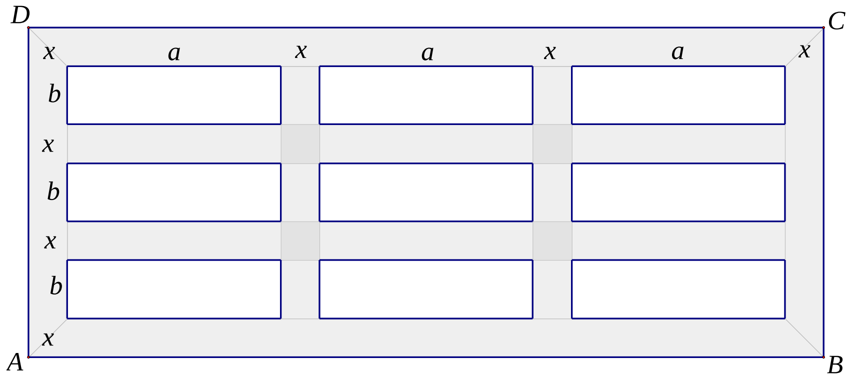
Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2013 : 3 = 671 djeljiv brojem 3. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 3, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 15, a ima ih 2010 : 15 = 134. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 3, ali nisu brojem 5 ima 671 – 134 = 537.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2010 : 6 = 335 djeljivih brojevima 2 i 3 (odnosno brojem 6). Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 6, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 30, a ima ih 2010 : 30 = 67. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 6, ali nisu brojem 5 ima 335 – 67 = 268.

Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima 806 + 537 – 268 = 1075. Brojeve djeljive brojevima 2 i 3 smo brojali dvaput pa smo morali oduzeti 268.

4. Prvi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

U izrazu $3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$ pribrojnik $4 \cdot x$ uvijek je paran, a zbroj je neparan pa slijedi da je broj b neparan broj manji od 7 $(3 \cdot 7 = 21,\ \ 21 > 17)$.

Za $b = 1$ vrijedi $3 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 14$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

Za $b = 3$ vrijedi $9 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 8$ pa je $x = 2$.

Za $b = 5$ vrijedi $15 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 2$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

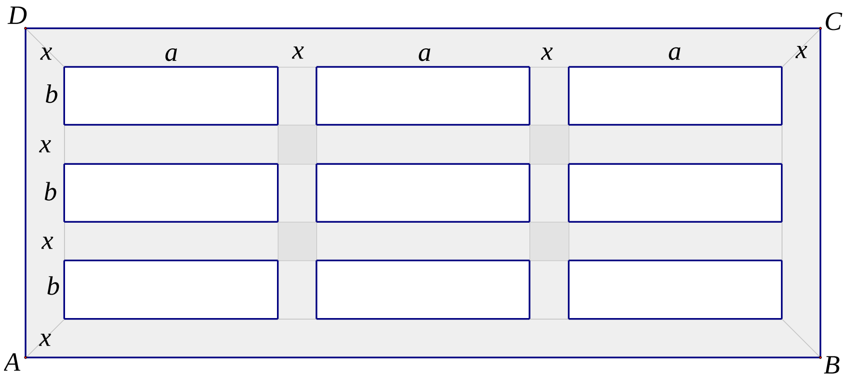
Uvrstimo li $x = 2$ u jednadžbu $3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ redom dobivamo $3 \cdot a + 8 = 41$, $3 \cdot a = 33$, tj. $a = 11$.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2. Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2.

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400$ cm^2.

Drugi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

Iz uvjeta da i duljine stranica malih pravokutnika i razmaci budu prirodni brojevi u centimetrima mora vrijediti nejednakost $4 \cdot x < 17$.

Dakle, duljina razmaka x može biti 1 cm, 2 cm, 3 cm ili 4 cm.

Za $x = 1$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 1 = 13$, a u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 2$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 2 = 9$ iz čega slijedi da je $b = 3$ cm.

Za $x = 3$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 3 = 5$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 4$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 4 = 1$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

To znači da može biti samo $b = 3$ cm.

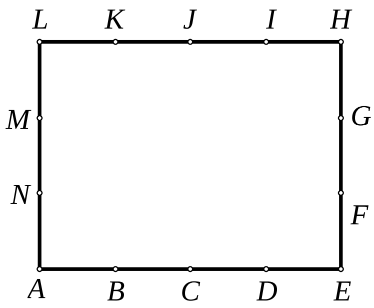
Dalje vrijedi da je $a = (41 - 4x) : 3 = (41 - 4 \cdot 2) : 3 = 11$ cm.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2. Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2.

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400$ cm^2.

5. Prvi način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Točkom *A* i još nekim drugim točkama pravokutnika određeno je 8 pravaca.

Točkama *B*, *C* i *D* i nekim drugim točkama (osim *A*) određeno je $3 \cdot 9 = 27$ pravaca.

Točkom *E* i još nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C* i *D*) pravokutnika određeno je 7 pravaca.

Točkama *F* i *G* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D* i *E*) određeno je $2 \cdot 6 = 12$ pravaca.

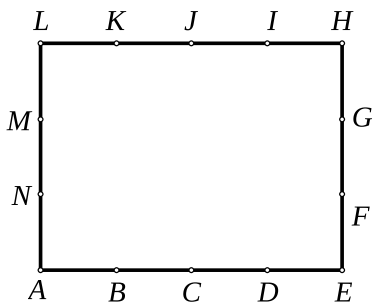
Točkom *H* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* i *G*) određena su 3 pravca.

Točkama *K*, *J* i *I* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* i *H*) određeno je $3 \cdot 2 = 6$ pravaca.

Te točke određuju $8 + 27 + 7 + 12 + 3 + 6 = 63$ pravca.

Drugi način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

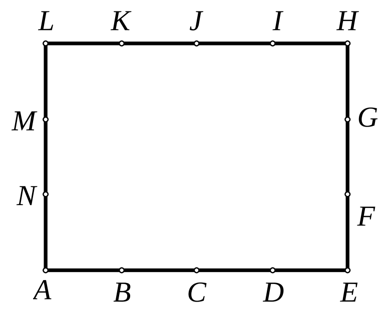
Postoje ukupno 4 pravca kojima pripadaju stranice pravokutnika.

Točke *I*, *J* i *K* sa svakom (od 5) točaka istaknutih na dužini $\overline{AE}$ određuju po 5 različitih pravaca, a točke *F*, *G*, *M*, *N*, *H* i *L* po 4 pravca (različita od stranica). To je $3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 15 + 24 = 39$ različitih pravaca.

Točke *F* i *G* s točkama od *I* do *N* (tih je točaka 6) određuju po 6 različitih pravaca i tih je pravaca ukupno $2 \cdot 6 = 12$, a točka *H* s točkama *M* i *N* određuje 2 različita pravca. Točke *I*, *J* i *K* s točkama *M* i *N* određuju ukupno 6 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je $4 + 39 + 12 + 2 + 6 = 63$.

Treći način:
Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Vrhovi pravokutnika određuju ukupno 6 pravaca (4 kojima pripadaju stranice i 2 kojima pripadaju dijagonale).

Vrh A i točke na stranicama $\overline{EH}$ i $\overline{HL}$ određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Vrh E i točke na stranicama $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Točka B i točke na stranicama $\overline{EH}$, $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 9 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke C i D pa je to 27 pravaca.

Točka F i točke na stranicama $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 6 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točku G pa je to 12 pravaca.

Točka H i točke na stranici $\overline{AL}$ određuju 2 različita pravca (različita od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke I, J i K pa je to 8 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je $6 + 5 + 5 + 27 + 12 + 8 = 63$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj bombona koje je imala Janica.

Bratu je dala $\frac{x}{2}$ bombona pa joj je ostalo $\frac{x}{2}$ bombona.

Pojela je $\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{12}$ bombona te je poslije toga imala $\frac{x}{2} - \frac{x}{12} = \frac{5x}{12}$ bombona.

Kako je izgubila 2 ili 3 bombona, a Petri dala 6 bombona, postoje dvije mogućnosti:

$\frac{5x}{12} - 8 = 21$ ili $\frac{5x}{12} - 9 = 21$.

Iz $\frac{5x}{12} - 8 = 21$ slijedi $x = \frac{29 \cdot 12}{5} \notin \mathbb{N}$.

Iz $\frac{5x}{12} - 9 = 21$ slijedi $x = \frac{30 \cdot 12}{5} = 72$.

Janica je imala 72 bombona.

Drugi način:

Prije nego što je Petri dala bombone Janica je imala $21 + 6 = 27$ bombona.

Prije toga je izgubila 2 ili 3 bombona, a to znači da je prije toga imala $27 + 2 = 29$ bombona ili $27 + 3 = 30$ bombona.

Nakon što je bratu dala bombone, pojela je $\frac{1}{6}$ ostatka, a ostalo joj je $\frac{5}{6}$ tog ostatka. Dakle, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 29 ili 30.

S obzirom da je samo 30 djeljiv s 5, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 30, a ostatak je 36.

Budući da je bratu dala polovinu bombona, Janica je na početku imala $36 \cdot 2 = 72$ bombona.

Treći način:

Označimo broj bombona s *x*.

Tada iz uvjeta zadatka slijedi $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}x+a+6+21=x$, pri čemu je *a* jednako 2 ili 3.

Pomnožimo li gornju jednakost s 12, dobit ćemo $6x + x + 12a + 27\cdot 12 = 12x$ odnosno

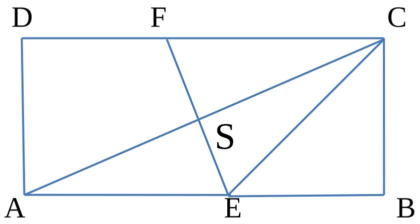
$5x = 324 + 12a$.

Za $a = 2$ je $5x = 348$ što je nemoguće jer *x* mora biti prirodan broj.

Za $a = 3$ je $5x = 360$ odakle slijedi $x = 72$.

Janica je imala 72 bombona.

2. Prvi način:



Kako je trokut *EBC* jednakokračan pravokutan, vrijedi $|\measuredangle ECB| = |\measuredangle BEC| = 45°$.

Budući da je *ABCD* pravokutnik, slijedi $|\measuredangle FCE| = 90° - |\measuredangle ECB| = 45°$.

S obzirom da točka *E* pripada simetrali *EF* dijagonale $\overline{AC}$, onda je $|EA| = |EC|$ što znači da je trokut *AEC* jednakokračan.

Tada je $|\measuredangle ACE| = |\measuredangle EAC|$.

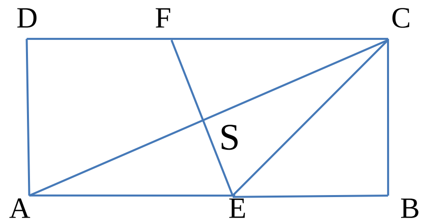
Dalje vrijedi $|\measuredangle EAC| = |\measuredangle FCA|$ jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima.

Dakle, $|\measuredangle ACE| = |\measuredangle FCA| = \frac{|\measuredangle FCE|}{2} = \frac{45°}{2} = 22.5°$.

Kako je $\measuredangle DFE$ vanjski kut trokuta *CFS*, vrijedi

$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle CSF| + |\measuredangle FCA| = 90° + 22.5° = 112.5°$.

Drugi način:



Kako je trokut EBC jednakokračan i pravokutan, vrijedi $|\measuredangle ECB| = |\measuredangle BEC| = 45°$.

Pravac FE je simetrala dijagonale $\overline{AC}$ pa je S polovište dužine $\overline{AC}$ i vrijedi $\overline{FE} \perp \overline{AC}$. Zato je

$\Delta AES \cong \Delta CES$ (prema poučku S-K-S – jedna zajednička kateta, pravi kut i $|AS| = |SC|$).

Slijedi da je $|\measuredangle SEA| = |\measuredangle CES|$. Kako je $|\measuredangle SEA| + |\measuredangle CES| + |\measuredangle BEC| = 180°$, slijedi

$2|\measuredangle CES| = 180° - 45°$ odnosno $|\measuredangle CES| = \dfrac{135°}{2} = 67.5°$.

Konačno, kako je $ABCD$ pravokutnik, to je $AB \parallel CD$, a za kutove s paralelnim kracima vrijedi

$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle BEF| = |\measuredangle CEF| + |\measuredangle BEC| = 67.5° + 45° = 112.5° = 112°30'$.

3. Prvi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ puta.

Zato je zbroj znamenaka na svakom dekadskom mjestu jednak

$336 \cdot 9 + 336 \cdot 8 + 336 \cdot 7 + 336 \cdot 6 + 336 \cdot 5 + 336 \cdot 4 + 336 \cdot 3 + 336 \cdot 2 + 336 \cdot 1 =$

$= 336 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 336 \cdot 45 = 15120$.

Onda je zbroj svih tih brojeva

$15120 \cdot 1000 + 15120 \cdot 100 + 15120 \cdot 10 + 15120 \cdot 1 = 15120 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) =$

$= 15120 \cdot 1111 = 16\,798\,320$.

Drugi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ puta.

Zato svaka znamenka $x \in \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,\}$ pridonosi ukupnom zbroju s

$$336 \cdot x \cdot 1000 + 336 \cdot x \cdot 100 + 336 \cdot x \cdot 10 + 336 \cdot x \cdot 1 =$$

$$= 336 \cdot x \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 336 \cdot x \cdot 1111.$$

Onda je zbroj svih tih brojeva

$$336 \cdot 1111 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 336 \cdot 1111 \cdot 45 = 16\ 798\ 320\,.$$

4. Kako je $6 = 2 \cdot 3$, traženi brojevi trebaju biti djeljivi i s 2 i s 3.

Budući da je traženim brojevima zbroj znamenaka djeljiv sa 6, onda je zbroj znamenaka djeljiv i s 3, a to znači da su djeljivi s 3.

Da bi bili djeljivi s 2 znamenka jedinica treba biti 0, 2, 4, 6 ili 8.

Zbroj znamenaka troznamenkastog broja može biti najviše 27.

S obzirom da je zbroj znamenaka traženih brojeva djeljiv sa 6, zbroj znamenaka traženih brojeva može biti 6, 12, 18 ili 24.

Ako je zbroj 6, znamenke mogu biti iz skupova {0, 1, 5}, {0, 2, 4}, {1, 2, 3}.

Traženi brojevi su: 150, 510, 204, 240, 402, 420, 312, 132.

Ako je zbroj 12, znamenke mogu biti iz skupova {0, 3, 9}, { 1, 2, 9}, {0, 4, 8}, { 1, 3, 8}, { 0, 5, 7}, {1, 4, 7}, { 2, 3, 7}, { 1, 5, 6 }, { 2, 4, 6}, {3, 4, 5}.

Traženi brojevi su: 390, 930, 192, 912, 408, 480, 804, 840, 138, 318, 570, 750, 174, 714, 372, 732, 156, 516, 246, 264, 426, 462, 624, 642, 354, 534.

Ako je zbroj 18, znamenke mogu biti iz skupova {1, 8, 9}, {2, 7, 9}, {3, 6, 9}, {4, 5, 9}, {3, 7, 8}, {4, 6, 8}, {5, 6, 7}.

Traženi brojevi su: 198, 918, 792, 972, 396, 936, 594, 954, 378, 738, 468, 486, 648, 684, 846, 864, 576, 756.

Ako je zbroj 24, znamenke mogu biti iz skupa {7, 8, 9}.

Traženi brojevi su: 798, 978.

Ukupan broj traženih brojeva je 54.

5. Prvi način:

U 1. mogućem slučaju natjecatelji žive u 18 ili više različitih naselja.

Tada iz nekih 18 različitih naselja u kojima žive odaberemo po 1 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 2. mogućem slučaju natjecatelji žive u 17 različitih naselja.

U tom slučaju nije moguće odabrati 18 učenika koji žive u 18 različitih naselja.

Kada bi u svakom od tih naselja bilo najviše po 17 učenika, tada bi u tih 17 naselja bilo najviše $17 \cdot 17 = 289$ učenika. Kako je ukupan broj učenika 290, u nekom od tih 17 naselja živi barem 18 učenika. Iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 3. mogućem slučaju natjecatelji žive u 16 ili manje različitih naselja.

U tom slučaju (analogno kao u 2. slučaju) u nekom od tih naselja živi barem 18 učenika pa iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i imamo traženi odabir.

Drugi način:

Pretpostavimo da se ne može odabrati 18 učenika koji žive u istom naselju niti 18 učenika koji dolaze iz 18 različitih naselja.

To znači da svi učenici dolaze iz najviše 17 naselja i iz svakog naselja dolazi najviše 17 učenika.

U tom slučaju bi najveći mogući broj učenika bio $17 \cdot 17 = 289$, a na natjecanju je 290 učenika (jedan više).

Dakle, pretpostavka je bila netočna pa iz jednog naselja dolazi (barem) 18 učenika ili se može odabrati 18 učenika iz 18 različitih naselja, a što je i trebalo dokazati.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4\,c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26\,z$.

Broj gledatelja je manji i iznosi p% broja gledatelja prije poskupljenja cijene ulaznica pa vrijedi da je $N = p\% \cdot n = \frac{p}{100} \cdot n$.

Zarada prije poskupljenja je $z = n \cdot c$, a zarada poslije poskupljenja je $Z = N \cdot C$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = \frac{p}{100} \cdot n \cdot 1.4 \cdot c = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot (n \cdot c) = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z$.

Dalje je $1.26 \cdot z = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z$ odnosno $1.26 = 1.4 \cdot \frac{p}{100}$ te konačno $\frac{p}{100} = \frac{1.26}{1.4} = \frac{126}{140} = \frac{90}{100}$.

Prema tome je $N = 90\ \%\ n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10 %.

Drugi način.

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Tada vrijedi $z = n \cdot c$ i $Z = N \cdot C$.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4\,c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26\,z$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = N \cdot 1.4c$ i $Z = 1.26z = 1.26\,n \cdot c$ odnosno $N \cdot 1.4c = 1.26\,n \cdot c$.

Zaključujemo da je

$$\frac{N}{n} = \frac{1.26c}{1.4c} = \frac{1.26}{1.4} = 0.9 \text{ ili } N = 0.9n.$$

Prema tome je $N = 90\ \%\ n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10 %.

2. Prvi način.

Jednakosti $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$ mogu se zapisati kao tri jednadžbe.

1. $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4} \Rightarrow 4a+4b=3b+3c \Rightarrow b=3c-4a$
2. $\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5} \Rightarrow 5b+5c=4c+4a \Rightarrow c=4a-5b$
3. $\frac{a+b}{3}=\frac{c+a}{5} \Rightarrow 5a+5b=3c+3a \Rightarrow 2a=3c-5b$

Koristeći drugu i treću jednadžbu dobiva se:

$c=4a-5b=2\cdot 2a-5b=2\cdot(3c-5b)-5b=6c-10b-5b=6c-15b \Rightarrow 5c=15b \Rightarrow \underline{c=3b}$.

Dalje, iz treće jednadžbe dobiva se: $2a=3c-5b=3\cdot 3b-5b=9b-5b=4b \Rightarrow \underline{a=2b}$.

Nakon uvrštavanja dobivamo redom:

$\overline{abc}=100\cdot a+10\cdot b+c=100\cdot 2b+10\cdot b+3b=200b+10b+3b=213b$.

Budući da su *a*, *b* i *c* znamenke, postoje tri troznamenkasta broja za $b\in\{1,2,3\}$, a traženi brojevi su

213, 426, 639.

Drugi način.

Raspisujući zadani uvjet redom dobivamo:

$$\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=k, k>0$$
$$\frac{a+b}{3}=k \Rightarrow a+b=3\cdot k \Rightarrow \underline{a=3k-b}$$
$$\frac{c+a}{5}=k \Rightarrow c+a=5\cdot k \Rightarrow c=5k-a=5k-(3k-b)=5k-3k+b \Rightarrow \underline{c=2k+b}$$
$$\frac{b+c}{4}=k \Rightarrow b+c=4\cdot k \Rightarrow b=4k-c=4k-(2k+b)=4k-2k-b=2k-b$$
$$\underline{b=2k-b} \Rightarrow 2b=2k \Rightarrow k=b$$

Prema tome, za znamenke *a*, *b* i *c* vrijedi $a=2k,\ b=k,\ c=3k,\ k\in N$. Uvrštavanjem prirodnih

brojeva umjesto *k*, redom dobivamo:

k	1	2	3	4
$a=2k$	2	4	6	8
$b=k$	1	2	3	4
$c=3k$	3	6	9	12
$\overline{abc}$	213	426	639	-

Budući da su *a*, *b* i *c* znamenke postoje tri troznamenkasta broja za $b \in \{1,2,3\}$, a traženi brojevi su 213, 426, 639.

3. Prilikom rješavanja koristi se svojstvo množenja cijelih brojeva: *Umnožak cijelih brojeva je cijeli broj*.

Dakle, pomnoži li se razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ brojem 5, dobiveni će umnožak ponovno biti cijeli broj, tj. zadani razlomak pišemo u obliku $\frac{4x-17}{5x+9} \cdot 5 = \frac{20x-85}{5x+9}$. Brojnik novog razlomka rastavljamo tako da dobijemo dio koji je višekratnik nazivnika:

$$\frac{20x-85}{5x+9} = \frac{20x+36-121}{5x+9} = \frac{20x+36}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = \frac{4 \cdot (5x+9)}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = 4 - \frac{121}{5x+9}.$$

Razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je $\frac{121}{5x+9}$ cijeli broj.

Razlomak $\frac{121}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je nazivnik $5x + 9$ djelitelj broja 121.

Djelitelji broja 121 su $1, -1, 11, -11, 121, -121$.

Za pozitivne djelitelje (1, 11 i 121) se ne dobivaju cjelobrojna rješenja.

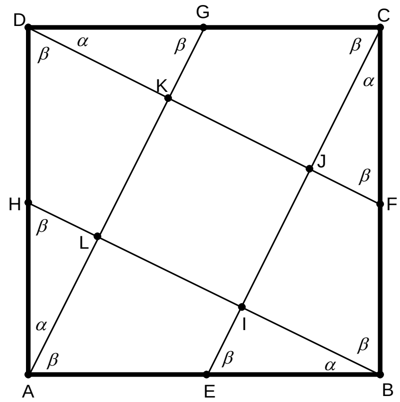
Za negativne djelitelje (–1, –11 i –121) redom dobivamo:

a) $5x+9=-1 \to 5x=-10 \to x=-2$,

b) $5x+9=-11 \to 5x=-20 \to x=-4$,

c) $5x+9=-121 \to 5x=-130 \to x=-26$.

4. Uz oznake kao na slici vrijedi:



Pravokutni trokuti *EBC*, *FCD*, *GDA* i *HAB* međusobno su sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta S-K-S jer je $|EB| = |FC| = |GD| = |HA| = 5 \text{ cm}$ i $|BC| = |CD| = |DA| = |AB| = 10 \text{ cm}$.

Posljedica navedene sukladnosti je jednakost veličina odgovarajućih kutova tih trokuta:

$|\measuredangle HBA| = |\measuredangle ECB| = |\measuredangle FDC| = |\measuredangle GAD| = \alpha$,

$|\measuredangle BEC| = |\measuredangle CFD| = |\measuredangle DGA| = |\measuredangle AHB| = \beta$.

Budući da je $\alpha + \beta = 90°$, slijedi da su kutovi s vrhovima u točkama *I*, *J*, *K* i *L* pravi, tj. da je četverokut *IJKL* pravokutnik te da je $|\measuredangle CBI| = |\measuredangle DCJ| = |\measuredangle ADK| = |\measuredangle BAL| = \beta$.

Pravokutni trokuti *ABL*, *BCI*, *CDJ* i *DAK* sukladni su prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K.

Zaključujemo da je $\overline{EC}$ usporedna s $\overline{AG}$ kao i $\overline{BH}$ s $\overline{FD}$.

Dužina $\overline{JF}$ srednjica je trokuta *BCI* pa je $|IJ| = |CJ| = \frac{1}{2}|IC|$ i $|JF| = \frac{1}{2}|IB| = x$. Analogno vrijedi za duljine stranica preostalih trokuta (*ABL*, *CDJ* i *DAK*), a time i za duljine stranica četverokuta *IJKL*.

Dakle, $|JF| = |KG| = |LH| = |IE| = x$ i $|CJ| = |IJ| = |DK| = |KJ| = |AL| = |LK| = |BI| = |IL| = 2x$.

Dakle, četverokut *IJKL* je kvadrat sa stranicom duljine 2*x*.

Preostaje izračunati površinu kvadrata *IJKL*. To možemo napraviti na više načina.

Prvi način:

Prema gore dokazanom zaključujemo da vrijedi $|EC| = |EI| + |IJ| + |JC| = 5x$ i $|IC| = |IJ| + |JC| = 4x$.

Prema poučku K-K trokut *EBC* sličan je trokutu *BIC* pa vrijedi $|EC| : |BC| = |BC| : |IC|$.

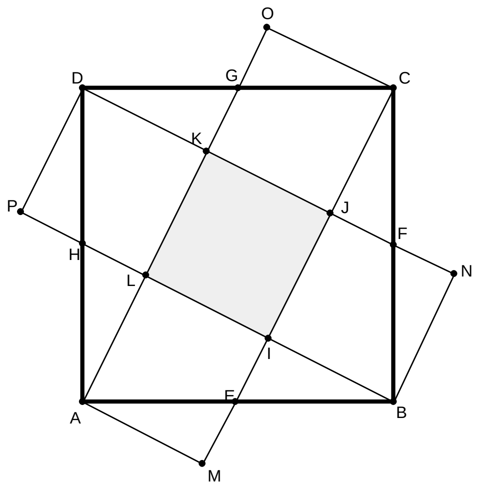
Uvrštavanjem poznatih podataka u taj razmjer dobivamo redom:

$$5x : 10 = 10 : 4x$$
$$20 \cdot x \cdot x = 100$$
$$x \cdot x = 5$$

Konačno, površina kvadrata *IJKL* jednaka je $P(IJKL) = |IJ| \cdot |JK| = 2x \cdot 2x = 4 \cdot x \cdot x = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}^2$.

Drugi način:

Nadopunimo sliku s četiri pravokutna trokuta.

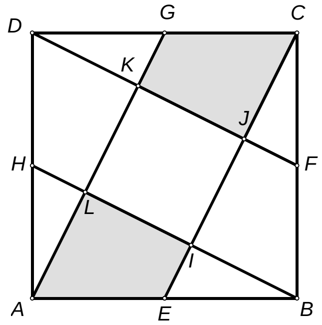


Trapeze *IBFJ*, *JCGK*, *KDHL* i *LAEI* moguće je nadopuniti do kvadrata pravokutnim trokutima *BNF*, *COG*, *DPH* i *AME* koji su sukladni trokutima *CJF*, *DKG*, *ALH* i *BIE*. Jednostavno je uočiti da je površina kvadrata *ABCD* jednaka površini pet manjih kvadrata (*AMIL*, *BNJI*, *COKJ*, *DPLK* i *IJKL* od kojih je jedan osjenčan), a koji su međusobno sukladni.

Dakle, površina osjenčanog kvadrata jednaka je $100 : 5 = 20 \text{ cm}^2$.

Treći način:

Kvadrat *ABCD* možemo podijeliti na dva sukladna pravokutna trokuta *AGD* i *CEB*. Svaki od njih ima površinu 25 cm^2. To znači da je površina paralelograma *AECG* jednaka 50 cm^2.

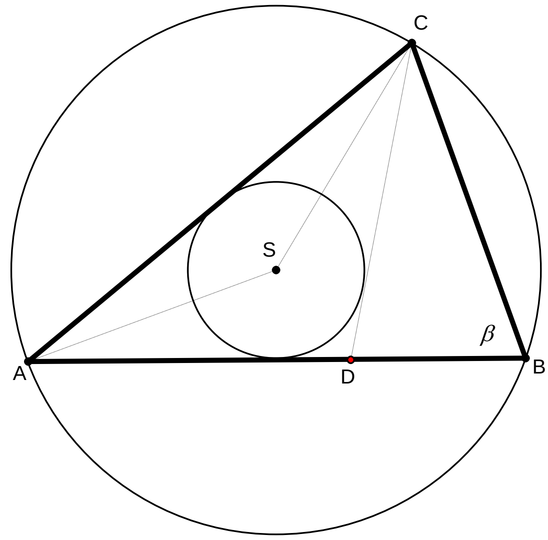


Paralelogram *AECG* sastavljen je od kvadrata *IJKL* (čiju površinu tražimo) i dvaju pravokutnih trapeza *AEIL* i *JCGK*. Duljine osnovica tih trapeza su $2x$ i x, a duljina visine im je jednaka $2x$. To znači da svaki od njih ima površinu $\frac{(2x+x)\cdot 2x}{2} = 3x \cdot x = 3x^2$, a površina kvadrata jednaka je $2x \cdot 2x = 4x \cdot x = 4x^2$.

Prema tome, vrijedi $3x^2 + 3x^2 + 4x^2 = 50$, tj. $10x^2 = 50$, odakle je $4x^2 = 20$.

Površina kvadrata *IJKL* je 20 cm^2.

5.



Neka je *S* središte upisane kružnice trokuta *ADC* i središte opisane kružnice trokuta *ABC* i neka je $|\measuredangle ABC| = \beta$. Kutovi $\measuredangle ASC$ i $\measuredangle ABC$ su središnji i pripadni obodni kut nad tetivom $\overline{AC}$. Na temelju poučka o središnjem i obodnom kutu vrijedi da je $|\measuredangle ASC| = 2\beta$.

Iz trokuta *ASC*, koji je jednakokračan jer je $|SA| = |SC|$, može se zaključiti da je

$$|\measuredangle SAC| = |\measuredangle SCA| = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta .$$

Pravac *AS* je simetrala unutarnjeg kuta trokuta *ADC* (*ABC*) pri vrhu *A* pa je

$$\alpha = |\measuredangle CAB| = 2 \cdot (90° - \beta) = 180° - 2\beta .$$

Na isti način vrijedi $|\measuredangle ACD| = 2 \cdot (90° - \beta) = 180° - 2\beta$.

Dalje možemo nastaviti na više načina.

Prvi način:

Pravac CD je simetrala kuta trokuta pri vrhu C pa je $\gamma = |\measuredangle ACB| = 2\cdot(180° - 2\beta) = 360° - 4\beta$.

Iz zbroja kutova trokuta ABC redom slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\beta + (180° - 2\beta) + (360° - 4\beta) = 180° \to 5\beta = 360° \to \beta = 72°$$

$$\alpha = 180° - 2\cdot 72° = 36°$$

$$\gamma = 180° - (72° + 36°) = 72°$$

Trokut ABC je jednakokračan s kutovima veličina 72º, 72º i 36º.

Drugi način:

Budući da je $|\measuredangle CAB| = |\measuredangle ACD| = 180° - 2\beta$, trokut ADC je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$.

Kut $\measuredangle BDC$ je vanjski kut trokuta ADC i vrijedi da je

$$|\measuredangle BDC| = |\measuredangle DAC| + |\measuredangle ACD| = 2(180° - 2\beta) = 360° - 4\beta .$$

Za kutove trokuta DBC vrijedi:

$$|\measuredangle BDC| + |\measuredangle CBD| + |\measuredangle DCB| = 180°$$
$$(360° - 4\beta) + \beta + (180° - 2\beta) = 180°$$
$$5\beta = 360°$$
$$\beta = 72°$$

Dalje slijedi da je $\gamma = 72°$ i $\alpha = 180° - 2\cdot 72° = 36°$.

Treći način:

Zbog činjenice da je u trokutu ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i da je $\alpha = |\measuredangle CAB| = 180° - 2\beta$, vrijedi

$180° - 2\beta + \beta + \gamma = 180°$ odnosno $-\beta + \gamma = 0$ što znači da je $\beta = \gamma$ i da je trokut ABC

jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$.

Budući da je pravac CD simetrala kuta $\measuredangle BCA$, zaključujemo da je $\gamma = 2\alpha$, a onda je i $\beta = 2\alpha$.

Konačno, uvrštavanjem dobivenih relacija u izraz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ redom dobivamo:

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, $5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$ i $\beta = \gamma = 2\cdot 36° = 72°$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$a-b=\underbrace{111...11}_{2016}-\underbrace{222...22}_{1008}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{999...99}_{2016}-\frac{2}{9}\cdot\underbrace{999...99}_{1008}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(10^{2016}-1\right)-\frac{2}{9}\cdot\left(10^{1008}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(10^{2016}-1-2\cdot10^{1008}+2\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(10^{2016}-2\cdot10^{1008}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(10^{1008}-1\right)^2=\left(\frac{10^{1008}-1}{3}\right)^2.$$

Kako je $10^{1008}-1=\underbrace{999...99}_{1008}$ broj djeljiv s 9, pa i s 3, to je $\frac{10^{1008}-1}{3}$ cijeli broj pa je $a-b$ kvadrat cijelog broja.

Drugi način:

$$a-b=\underbrace{111...11}_{2016}-\underbrace{222...22}_{1008}=\underbrace{111...11}_{2016}-2\cdot\underbrace{111...11}_{1008}=$$

$$=\underbrace{111...11}_{1008}\cdot\underbrace{100...01}_{1007}-2\cdot\underbrace{111...11}_{1008}=$$

$$=\underbrace{111...11}_{1008}\cdot\left(\underbrace{100...01}_{1007}-2\right)=\underbrace{111...11}_{1008}\cdot\underbrace{999...99}_{1008}=$$

$$=\underbrace{111...11}_{1008}\cdot9\cdot\underbrace{111...11}_{1008}=\underbrace{111...11}_{1008}{}^2\cdot3^2=$$

$$=\underbrace{333...33}_{1008}{}^2$$

Time je tvrdnja dokazana.

2. Prvi način:

Pretpostavimo da je $a \geq b$.

Kako su a i b iz skupa $\{1, 2, 3, 4, ..., 25, 26\}$ i njihov umnožak je jednak zbroju preostala 24 broja,

vrijedi $a + b + a \cdot b = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 25 + 26$ odnosno $a + b + a \cdot b = 351$.

S obje strane jednakosti dodajemo 1 pa vrijedi $a + b + a \cdot b + 1 = 352$.

Faktorizacijom lijeve strane dobivamo $(1 + b) \cdot (1 + a) = 352$.

Znači, broj 352 je umnožak neka dva prirodna broja $a + 1$ i $b + 1$.

Rastavljanjem broja 352 na proste faktore dobivamo $352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$.

Brojevi a i b su iz skupa $\{1, 2, 3, 4, ..., 25, 26\}$, $a \geq b$, pa slijedi da je $a + 1 = 22$ i $b + 1 = 16$.

Nadalje, $a = 21$ i $b = 15$.

Slijedi $|a - b| = 6$.

Drugi način:

Pretpostavimo da je $a \geq b$.

Kako su a i b iz skupa $\{1, 2, 3, 4, ..., 25, 26\}$ i njihov umnožak je jednak zbroju preostala 24 broja,

vrijedi $a + b + a \cdot b = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 25 + 26$ odnosno $a + b + a \cdot b = 351$.

Nadalje je $a \cdot b + a = 351 - b$

$$a \cdot (b + 1) = 351 - b$$

$$a = \frac{351 - b}{b + 1} = \frac{-(b + 1) + 352}{b + 1} = \frac{-(b + 1)}{b + 1} + \frac{352}{b + 1} = -1 + \frac{352}{b + 1}.$$

To znači da $b + 1$ mora biti djelitelj broja 352.

Rastavljanjem broja 352 na proste faktore dobivamo $352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$.

Brojevi a i b su iz skupa $\{1, 2, 3, 4, ..., 25, 26\}$, $a \geq b$, pa slijedi da je $b + 1 = 16$ odnosno $b = 15$.

Nadalje, $a = -1 + \dfrac{352}{b + 1} = -1 + 22 = 21$.

Slijedi $|a - b| = 6$.

3. Prvi način:

Neka je bilo m muškaraca. Broj rukovanja može se prikazati formulom $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$.

Iz jednadžbe $\frac{m\cdot(m-1)}{2}=78$ dobije se kvadratna jednadžba $m^2 - m - 156 = 0$.

Iz rastava $(m - 13)\cdot(m + 12) = 0$ vidi se da su rješenja jednadžbe $m_1 = 13$ i $m_2 = -12$.

Broj m mora biti prirodni broj pa se zaključi da je na večeri bilo 13 muškaraca.

Neka je n broj dama na večeri. Broj poljubaca među damama se može iskazati kao $n\cdot(n-1)$, a broj poljubaca između muškaraca i dama s $13\cdot n$.

Iz $n\cdot(n-1) + 13n = 288$ sređivanjem se dobije kvadratna jednadžba $n^2 + 12n - 288 = 0$.

Rastavom $(n - 12)\cdot(n + 24) = 0$ dolazi se do rješenja jednadžbe $n_1 = 12$ i $n_2 = -24$.

Kako i n mora biti prirodan broj, očito je na večeri bilo 12 dama.

Ukupno je na večeri bilo 25 osoba.

Drugi način:

Neka je bilo m muškaraca. Broj rukovanja može se prikazati formulom $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$.

Iz jednadžbe $\frac{m\cdot(m-1)}{2}=78$ dobijemo broj muškaraca: $m\cdot(m-1)=2\cdot2\cdot3\cdot13$

$$m\cdot(m-1)=13\cdot12$$

$$m=13.$$

Na večeri je bilo 13 muškaraca.

Neka je n broj dama na večeri. Broj poljubaca među damama se može iskazati kao $n\cdot(n-1)$, a broj poljubaca između muškaraca i dama s $13\cdot n$.

Iz jednadžbe $n\cdot(n-1)+13n=288$ dobijemo broj dama: $n\cdot(n-1+13)=288$

$$n\cdot(n+12)=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$$

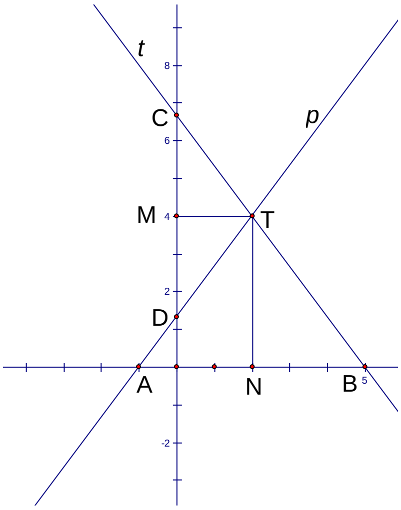
$$n\cdot(n+12)=12\cdot24$$

$$n=12.$$

Na večeri je bilo 12 dama.

Ukupno je na večeri bilo 25 osoba.

4. Skica:



ΔABT je jednakokračan te visina iz vrha T dijeli osnovicu $\overline{AB}$ na dva jednaka dijela.

Tada je $a = |AB|$, $\frac{a}{2} = |NB|$, $|TN| = 4$ te je $P(\Delta ABT) = \frac{a \cdot 4}{2} = 2a$.

ΔCDT je jednakokračan te visina iz vrha T dijeli osnovicu $\overline{CD}$ na dva jednaka dijela.

Tada je $b = |CD|$, $\frac{b}{2} = |MC|$, $|TM| = 2$ te je $P(\Delta CDT) = \frac{b \cdot 2}{2} = b$.

Iz zadanog omjera površina $P(\Delta ABT) : P(\Delta CDT) = 9:4$ dobijemo: $2a : b = 9:4$

$$9b = 8a$$

$$b = \frac{8}{9}a \, .$$

U trokutu ΔABT vrijedi $\overline{TN} \perp \overline{AB}$, a u trokutu ΔCDT vrijedi $\overline{TM} \perp \overline{CD}$.

Slijedi da je $\overline{MC} \parallel \overline{TN}$ i $\overline{TM} \parallel \overline{NB}$ pa su trokuti ΔNBT i ΔMTC slični prema poučku K-K o sličnosti.

Iz sličnosti vrijedi proporcija: $|NB| : |TN| = |TM| : |MC|$

$$\frac{a}{2} : 4 = 2 : \frac{b}{2}$$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = 8$$

$$ab = 32 \, .$$

Uvrstimo li $b = \frac{8}{9}a$ u jednadžbu $ab = 32$ slijedi: $a \cdot \frac{8}{9}a = 32$

$$8a^2 = 288$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6.$$

Koordinate točke N su $N(2,0)$, a kako je točka N polovište dužine $\overline{AB}$, slijedi da su koordinate točaka A i B jednake $A(-1,0)$, $B(5,0)$.

Pravac p zadan je točkama $A(-1,0)$ i $T(2,4)$ i neka je njegova jednadžba $y = a_1 x + b_1$.

Tada je:

$$\begin{array}{l} 0 = a_1 \cdot (-1) + b_1 \\ \underline{4 = a_1 \cdot 2 + b_1} \end{array}$$

a rješavanjem tog sustava jednadžbi slijedi $a_1 = \frac{4}{3}$, $b_1 = \frac{4}{3}$.

Dakle, $p \ldots y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

Pravac t zadan je točkama $B(5,0)$ i $T(2,4)$ i neka je njegova jednadžba $y = a_2 x + b_2$.

Tada je:

$$\begin{array}{l} 0 = a_2 \cdot 5 + b_2 \\ \underline{4 = a_2 \cdot 2 + b_2} \end{array}$$

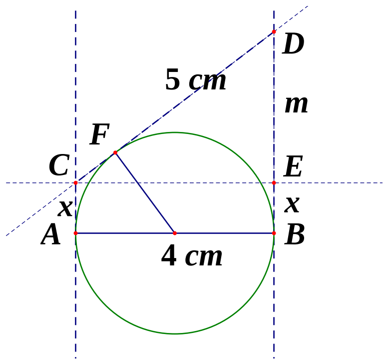
a rješavanjem tog sustava jednadžbi slijedi $a_2 = -\frac{4}{3}$, $b_2 = \frac{20}{3}$.

Dakle, $t \ldots y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$.

Napomena: Na skici su se mogli postaviti zamijenjeni položaji pravaca p i t, točaka A i B te točaka C i D. Tada će i rješenja imati zamijenjene vrijednosti.

5. Prvi način: Algebarski pristup.

Potrebno je odrediti udaljenost točke *C* od pravca *AB*.
Skica:



Nacrtamo paralelu s promjerom $\overline{AB}$ kroz *C* te neka je $x = |AC| = |BE|$.

Dobijemo pravokutan trokut *CED* s hipotenuzom $\overline{CD}$ duljine 5 cm i katetom $\overline{CE}$ duljine 4 cm.

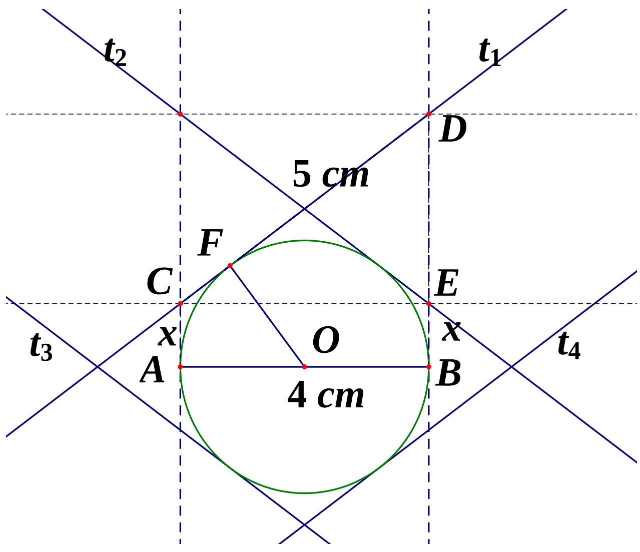
Primjenom Pitagorinog poučka izračunamo duljinu druge katete $\overline{ED}$ te vrijedi $|DE| = 3$ cm.

Dužina $\overline{CF}$ je duljine x jer su trokuti *AOC* i *FOC* sukladni. (Pravokutni trokuti nad istom hipotenuzom $\overline{OC}$ - sukladne dvije odgovarajuće stranice i sukladni kutovi nasuprot veće stranice.)

Dužina $\overline{FD}$ je duljine $x + 3$ jer su trokuti *BOD* i *FOD* sukladni. (Pravokutni trokuti nad istom hipotenuzom $\overline{OD}$ - sukladne dvije odgovarajuće stranice i sukladni kutovi nasuprot veće stranice.)

Iz gornje dvije tvrdnje slijedi $x + x + 3 = 5$ odnosno $2x + 3 = 5$ pa je $x = 1$ cm.

Kako tražene udaljenosti možemo nanijeti na četiri različita načina moguća su četiri rješenja za



tangentu.

Drugi način: Konstrukcijom.

1. Nacrtamo kružnicu *k* sa središtem *O* promjera 4 cm.
2. Na kružnici *k* odaberemo promjer $\overline{AB}$
3. Točkom *A* konstruiramo okomicu na promjer, tj. tangentu t_A kružnice *k* u točki *A*.
4. Točkom *B* konstruiramo okomicu na promjer, tj. tangentu t_B kružnice *k* u točki *B*.
5. Na tangenti t_A odaberemo proizvoljnu točku *P*.
6. Nacrtamo kružnicu $k_1(P, 5\,\text{cm})$.
7. Kružnica k_1 i tangenta t_B sijeku se u dvije točke R_1 i R_2.
8. Točkom *O* konstruiramo okomicu o' na pravac PR_1.
9. Kružnica k i pravac o' sijeku se u točkama 1 i 2, koje su dirališta traženih tangenti.
10. Točkom 1 konstruiramo paralelu s pravcem PR_1, to je tangenta t_{C1}.
11. Točkom 2 konstruiramo paralelu s pravcem PR_1, to je tangenta t_{C2}.
12. Točkom *O* konstruiramo okomicu o'' na pravac PR_2.
13. Kružnica k_1 i pravac o'' sijeku se u točkama 3 i 4, koje su dirališta traženih tangenti.
14. Točkom 3 konstruiramo paralelu s pravcem PR_2, to je tangenta t_{C3}.
15. Točkom 4 konstruiramo paralelu s pravcem PR_2, to je tangenta t_{C4}.