

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\frac{5n^2 - 9}{2n + 6} = \frac{5n^2 - 45 + 36}{2(n+3)} = \frac{5(n^2 - 9) + 36}{2(n+3)} = \frac{5(n-3)(n+3)}{2(n+3)} + \frac{36}{2(n+3)} = \frac{5(n-3)}{2} + \frac{18}{n+3} \quad 4 \text{ BODA}$$

Da bi vrijednost tog razlomka bila cijeli broj mora biti:

a) $n - 3$ paran broj, odnosno n neparan broj, 1 BOD

b) $n + 3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$. 1 BOD

Kako je n neparan, onda je $n + 3$ paran broj pa je $n + 3 \in \{2, -2, 6, -6, 18, -18\}$. 2 BODA

Sada je $n \in \{-1, -5, 3, -9, 15, -21\}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svako pogodeno rješenje bez obrazloženja vrijedi po 1 bod.

Drugi način:

$$\begin{aligned} \frac{5n^2 - 9}{2n + 6} &= \frac{5\left(n^2 - \frac{9}{5}\right)}{2(n+3)} = \frac{5}{2} \left[\frac{n(n+3) - 3n - \frac{9}{5}}{(n+3)} \right] = \\ &= \frac{5}{2} \left[n - \frac{3n + \frac{9}{5}}{n+3} \right] = \frac{5}{2} \left[n - \frac{3(n+3) - 9 + \frac{9}{5}}{n+3} \right] = \\ &= \frac{5}{2} \left[n - 3 + \frac{\frac{36}{5}}{n+3} \right] = \frac{5}{2}(n-3) + \frac{5}{2} \cdot \frac{36}{5(n+3)} = \\ &= \frac{5}{2}(n-3) + \frac{18}{n+3} \end{aligned} \quad 4 \text{ BODA}$$

Da bi vrijednost tog razlomka bila cijeli broj mora biti:

a) $n - 3$ paran broj, odnosno n neparan broj, 1 BOD

b) $n + 3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$. 1 BOD

Kako je n neparan, onda je $n + 3$ paran broj pa je $n + 3 \in \{2, -2, 6, -6, 18, -18\}$. 2 BODA

Sada je $n \in \{-1, -5, 3, -9, 15, -21\}$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svako pogodeno rješenje bez obrazloženja vrijedi po 1 bod.

2. Prvi način:

Ako je prvi broj x , onda se drugi može prikazati kao $10 - x$, a uvjet zadatka daje:

$$x^2 : (10 - x)^2 = 1 : 16. \quad 2 \text{ BODA}$$

Dalje slijedi: $16x^2 = (10 - x)^2$

$$16x^2 = 100 - 20x + x^2$$

$$15x^2 + 20x - 100 = 0 \quad / : 5$$

$$3x^2 + 4x - 20 = 0 \quad 2 \text{ BODA}$$

Ovu kvadratnu jednadžbu riješimo rastavljanjem srednjeg člana:

$$3x^2 - 6x + 10x - 20 = 0$$

$$3x \cdot (x - 2) + 10 \cdot (x - 2) = 0$$

$$(x - 2) \cdot (3x + 10) = 0 \quad 2 \text{ BODA}$$

Iz $x - 2 = 0$ je rješenje $x_1 = 2$, a iz $3x + 10 = 0$ je rješenje $x_2 = -\frac{10}{3}$. 2 BODA

Još se izračuna $10 - 2 = 8$ odnosno $10 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}$. 1 BOD

Konačno, $10 = 2 + 8$ i $10 = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3}$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je prvi broj x , onda se drugi može prikazati kao $10 - x$, a uvjet zadatka daje:

$$x^2 : (10 - x)^2 = 1 : 16. \quad 2 \text{ BODA}$$

Dalje slijedi $(x : (10 - x))^2 = (1 : 4)^2$ 2 BODA

pa je $\frac{x}{10 - x} = \frac{1}{4}$ ili $\frac{x}{10 - x} = -\frac{1}{4}$. 2 BODA

Prva mogućnost daje $4x = 10 - x$ te je rješenje $x_1 = 2$, a druga mogućnost daje $4x = -10 + x$

te je rješenje $x_2 = -\frac{10}{3}$.

2 BODA

Još se izračuna $10 - 2 = 8$ odnosno $10 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}$.

1 BOD

Konačno, $10 = 2 + 8$ i $10 = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3}$.

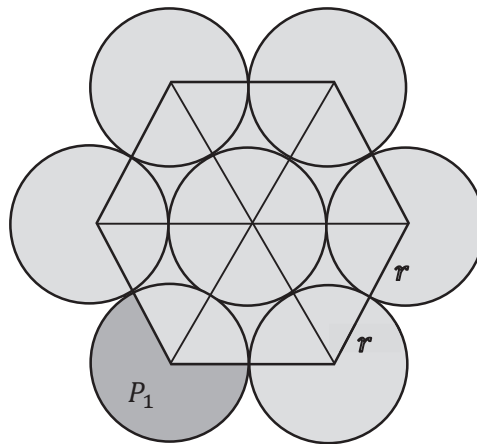
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Spojimo li središta vanjskih 6 krugova, dobit ćemo pravilni šesterokut stranice $a = 2r$.

1 BOD

Površina tog šesterokuta jednaka je šesterstrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice

$$a = 2r \text{ odnosno } P_{\text{šesterokuta}} = 6 \cdot P_{\Delta} = 6 \cdot \frac{(2r)^2 \sqrt{3}}{4} = 6r^2 \sqrt{3}.$$

3 BODA

Preostala površina sastoji se od šest jednakih kružnih isječaka s pripadnim središnjim kutom 240° .

Svaki od njih ima površinu jednaku $\frac{2}{3}$ površine cijelog kruga. Dakle, $P_1 = \frac{2}{3} \cdot r^2 \pi$.

3 BODA

Prema tome, osjenčani lik ima površinu

$$P = P_{\text{šesterokuta}} + 6P_1 = 6r^2 \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot r^2 \pi = 6r^2 \sqrt{3} + 4r^2 \pi.$$

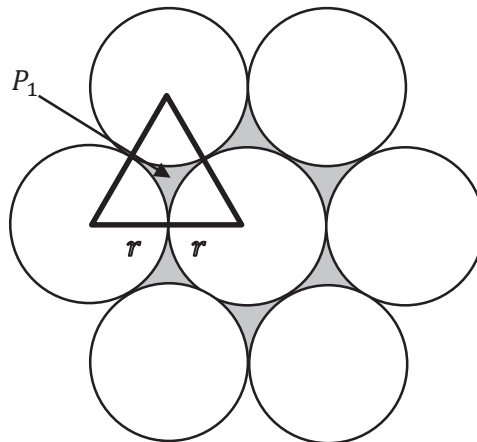
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:

1 BOD



Lik se sastoji od 7 jednakih krugova površine $P_{\text{kruga}} = r^2 \pi$ i šest jednakih (nepravilnih) dijelova površine P_1 (vidi sliku).

1 BOD

Površina nepravilnog lika P_1 može se izračunati kao površina jednakostraničnog trokuta stranice $2r$ umanjena za površinu tri jednaka kružna isječka središnjeg kuta 60° , točnije, za tri šestine površine kruga polumjera r .

2 BODA

Površina jednakostraničnog trokuta je $P_{\Delta} = \frac{(2r)^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \sqrt{3}$.

2 BODA

Dakle, $P_1 = P_{\Delta} - \frac{1}{2} P_{\text{kruga}} = r^2 \sqrt{3} - \frac{r^2 \pi}{2}$.

2 BODA

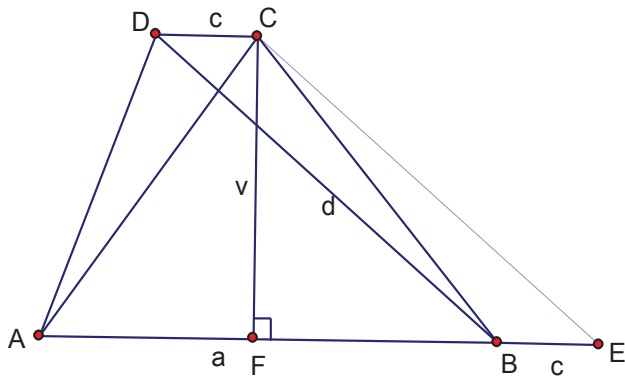
Prema tome, osjenčani lik ima površinu

$$P = 7P_{\text{kruga}} + 6P_1 = 7r^2 \pi + 6 \cdot \left(r^2 \sqrt{3} - \frac{r^2 \pi}{2} \right) = 7r^2 \pi + 6r^2 \sqrt{3} - 3r^2 \pi = 6r^2 \sqrt{3} + 4r^2 \pi .$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Zadana se jednađzba može zapisati u obliku $d^2 - 30d + v^2 - 24v + 369 = 0$

odnosno nadopunom na potpuni kvadrat $(d - 15)^2 - 225 + (v - 12)^2 - 144 + 369 = 0$

i konačno $(d - 15)^2 + (v - 12)^2 = 0$. 2 BODA

Lijeva strana jednađzbe jednaka je 0 ako je $d - 15 = 0$ i $v - 12 = 0$. 1 BOD

Iz $d - 15 = 0$ slijedi da je $d = 15$ cm, a

iz $v - 12 = 0$ slijedi da je $v = 12$ cm. 1 BOD

Na produžetku stranice \overline{AB} preko vrha B odaberimo točku E tako da je $d(B,E) = d(C,D)$.

Tada je $d(A,E) = a + c$.

Četverokut $BECD$ je paralelogram pa je $d(C,E) = d = 15$ cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta $\triangle AFC$ dobiva se $d(A,F) = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm, a

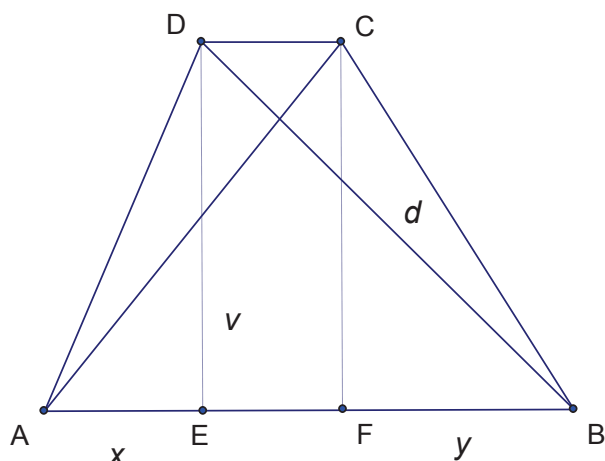
iz pravokutnog trokuta $\triangle CFE$ $d(F,E) = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm. 2 BODA

Kako je $d(A,F) + d(F,E) = d(A,E) = d(A,B) + d(B,E) = a + c = 5 + 9 = 14$ cm,

površina trapeza je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v = 84 \text{ cm}^2$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica: 1 BOD

Zadana se jednačba može zapisati u obliku $d^2 - 30d + v^2 - 24v + 369 = 0$

odnosno nadopunom na potpuni kvadrat $(d - 15)^2 - 225 + (v - 12)^2 - 144 + 369 = 0$

i konačno $(d - 15)^2 + (v - 12)^2 = 0$. 2 BODA

Lijeva strana jednačbe jednaka je 0 ako je $d - 15 = 0$ i $v - 12 = 0$. 1 BOD

Iz $d - 15 = 0$ slijedi da je $d = 15$ cm, a

iz $v - 12 = 0$ slijedi da je $v = 12$ cm. 1 BOD

Neka su E i F nožišta visina iz vrhova D i C redom na osnovicu \overline{AB} .

Nadalje, neka je $|AE| = x$ i $|BF| = y$, a $|CD| = c$, $|AB| = a$.

Kako je četverokut $EFCD$ pravokutnik, slijedi $|EF| = c$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute $\triangle DEB$ i $\triangle AFC$ dobije se $|BE| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm i

$|AF| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm. 2 BODA

Slijedi $|BE| = c + y = 9$, $|AF| = x + c = 5$.

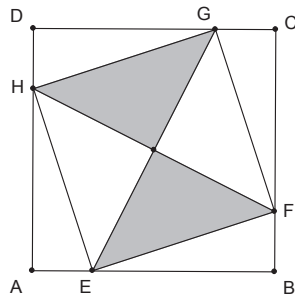
Zbrajanjem tih dviju jednakosti dobije se $x + y + 2c = 14$ odnosno $x + c + y + c = 14$, tj.

$a + c = 14$. 1 BOD

Površina trapeza je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v = 84$ cm². 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:



Neka je a duljina stranice kvadrata.

Tada je $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \frac{1}{4}a$, $|BE| = |CF| = |DG| = |AH| = \frac{3}{4}a$. 1 BOD

Trokuti $\triangle HAE$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ i $\triangle GDH$ su međusobno sukladni (pravokutni trokuti sa sukladnim stranicama duljina $\frac{1}{4}a$ i $\frac{3}{4}a$, prema poučku S-K-S o sukladnosti). 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|FE| = |GF| = |HG| = |EH| = x$. 1 BOD

Promotrimo trokut $\triangle HAE$.

Neka je $|\sphericalangle AEH| = \alpha$ i $|\sphericalangle EHA| = \beta$. Vrijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Zbog sukladnosti trokuta $\triangle HAE$ i $\triangle EBF$ je $|\sphericalangle BEF| = \beta$.

Zato je $|\sphericalangle HEF| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Na isti način može se pokazati da je $|\sphericalangle EFG| = |\sphericalangle FGH| = |\sphericalangle GHE| = 90^\circ$. 2 BODA

Četverokut $EFGH$ je kvadrat jer ima sve stranice jednake duljine i sve kutove prave. 1 BOD

Zatamnjeni dio čini polovinu kvadrata $EFGH$.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut $\triangle HAE$ dobivamo $\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = x^2$. 1 BOD

Nakon kvadriranja i zbrajanja slijedi $x^2 = \frac{5}{8}a^2$. 1 BOD

Kako je $a^2 = 80$, (površina zadanog kvadrata), slijedi $x^2 = \frac{5}{8} \cdot 80 = 50$. 1 BOD

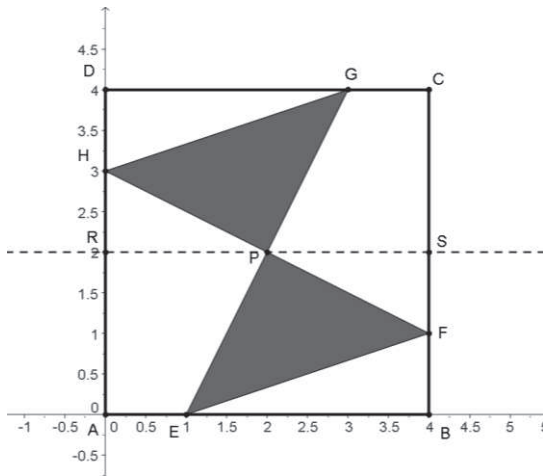
Površina kvadrata $EFGH$ iznosi 50 cm^2 , a zatamnjenog dijela 25 cm^2 . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje bez dokaza da je četverokut $EFGH$ kvadrat boduje se s najviše 6 bodova.

Drugi način:

Postavimo kvadrat $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav kao na slici.



1 BOD

Neka je a duljina stranice kvadrata.

Tada je $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \frac{1}{4}a$, $|BE| = |CF| = |DG| = |AH| = \frac{3}{4}a$.

1 BOD

Vrijedi $EG \equiv y = 2x - 2$ i $FH \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$

2 BODA

pa točka P kao presjek tih pravaca ima koordinate $P(2,2)$.

1 BOD

Dalje je $|HR| = |FS| = \frac{1}{4}a$ i $|RP| = |PS| = \frac{1}{2}a$.

1 BOD

Neka je P_1 površina trokuta DHG , P_2 površina trokuta HRP , P_3 površina trapeza $CGPS$,

P_K površina kvadrata $ABCD$ i P površina zatamnjenog dijela.

Vrijedi $P_1 = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3}{32}a^2 = 7.5 \text{ cm}^2$, $P_2 = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{1}{16}a^2 = 5 \text{ cm}^2$ i

$$P_3 = \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{16}a^2 = 15 \text{ cm}^2.$$

3 BODA

S obzirom da je slika centralnosimetrična s obzirom na točku P , vrijedi

$$P = P_K - 2 \cdot (P_1 + P_2 + P_3) = 80 - 2 \cdot 27.5 = 25 \text{ cm}^2.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Treba izračunati koliko je % poskupjela cijena materijala za izgradnju druge polovine zgrade sa 60 % udjela materijala uz poskupljenje 15%.

$$15\% \cdot 60\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{1000} = 4.5\% \quad 4 \text{ BODA}$$

Na sličan izračunavamo koliko je posto poskupjela cijena rada izgradnje druge polovine zgrade sa 40% udjela uz poskupljenje 8 %.

$$8\% \cdot 40\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{1000} = 1.6\% \quad 4 \text{ BODA}$$

$$4.5\% + 1.6\% = 6.1\% \quad 1 \text{ BOD}$$

Izgradnja stambene zgrade poskupjela je u odnosu na početnu cijenu za 6.1%. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Nakon povećanja od 15 %, trošak će biti $1.15 \cdot 0.3 = 0.345 = 34.5\%$ što je povećanje troškova za 4.5 %. 4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje. Nakon povećanja od 8 %, trošak će biti $1.08 \cdot 0.2 = 0.216 = 21.6\%$ što je povećanje troškova za 1.6 %. 4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je $4.5\% + 1.6\% = 6.1\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Povećanjem cijene troškova materijala za 15 %, trošak će se povećati za

$0.15 \cdot 0.3 = 0.045 = 4.5\%$. 4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje.

Povećanjem cijene rada za 8 %, trošak će se povećati za $0.08 \cdot 0.2 = 0.016 = 1.6\%$. 4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je $4.5\% + 1.6\% = 6.1\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Petorke znamenaka koje zadovoljavaju uvjet da je zbroj znamenaka traženih peteroznamenkastih

brojeva 42 su: {9, 9, 9, 9, 6}, {9, 9, 9, 8, 7} i {9, 9, 8, 8, 8}. 3 BODA

Koristeći znamenke prve petorke moguće je odrediti 5 brojeva, ali 69 999 ne zadovoljava uvjet da peteroznamenasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 996, 99 969, 99 699, 96 999 2 BODA

Koristeći znamenke druge petorke moguće je odrediti $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) = 20$ brojeva, ali 87 999, 79 998, 79 989, 79 899, 78 999 ne zadovoljavaju uvjet da peteroznamenasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 987, 99 978, 99 897, 99 879, 99 798, 99 789, 98 997, 98 979, 98 799, 97 998, 97 989, 97 899, 89 997, 89 979, 89 799. 2 BODA

Koristeći znamenke treće petorke moguće je odrediti $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) = 10$ brojeva i svi zadovoljavaju uvjet da peteroznamenasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 888, 98 988, 98 898, 98 889, 89 988, 89 898, 89 889, 88 998, 88 989, 88 899. 2 BODA

Traženih brojeva ima ukupno $4 + 15 + 10 = 29$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Navedeni svi peteroznamenasti brojevi, koji su rješenje zadatka, i odgovor bez obrazloženja boduju se s 10 bodova. Za rješenja koja su ponovljena ili pogrešna oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka dva ponovljena / pogrešna rješenja oduzima po 1 bod i to do najviše 0 bodova.

3. Prvi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

Kako je $2415 : 3 = 805$, Ante će dobiti $2 \cdot 805 = 1610$ kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Budući da je $2415 : 5 = 483$, Ante dobiva $2 \cdot 483 = 966$ kn, a Branko $3 \cdot 483 = 1449$ kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odnosno $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$. Ukupan broj događaja bacanja dviju

kocaka je $6 \cdot 6 = 36$. Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666\dots \approx 16.67\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

Drugi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

U tom slučaju Ante će dobiti $2k$ kn, a Branko k kn, pri čemu je k racionalan broj.

Vrijedi da je $2k + k = 2415$, $3k = 2415$, $k = 805$.

Ante će dobiti $2 \cdot 805 = 1610$ kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Tada će Ante dobiti $2l$ kn, a Branko $3l$ kn, pri čemu je l racionalan broj.

Budući da je $2l + 3l = 2415$, $5l = 2415$, $l = 483$.

Ante dobiva $2 \cdot 483 = 966$ kn, a Branko $3 \cdot 483 = 1449$ kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odnosno $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$. Ukupan broj događaja bacanja dviju

kocaka je $6 \cdot 6 = 36$. Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$. Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666\dots \approx 16.67\%$.

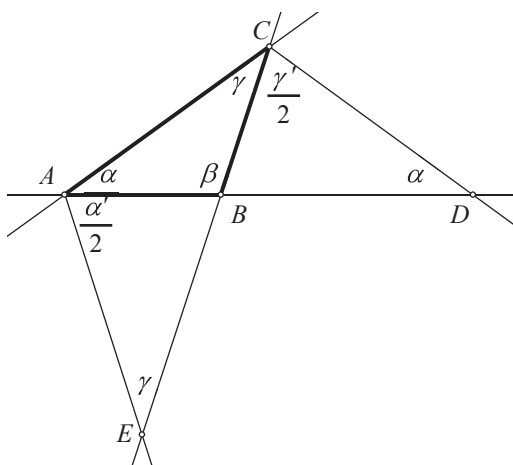
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

4. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Neka je $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle CBA| = \beta$ i $|\angle ACB| = \gamma$. Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo α' i γ' .

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha$$

$$\frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma$$

$$\frac{\gamma'}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

1 BOD

Trokut CAE je jednakokračan s osnovicom \overline{CE} pa vrijedi da je $|\angle CEA| = |\angle ACE| = \gamma$.

Budući da je $|\angle EAB| = \frac{\alpha'}{2}$ i $|\angle ACE| + |\angle EAC| + |\angle CEA| = 180^\circ$, vrijedi jednačba

$$\gamma + \alpha + \frac{\alpha'}{2} + \gamma = 180^\circ$$

$$2\gamma + \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

2 BODA

$$2\gamma + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ / \cdot 2 \longrightarrow 4\gamma + \alpha = 180^\circ \longrightarrow \alpha = 180^\circ - 4\gamma$$

Trokut ADC je jednakokračan s osnovicom \overline{AD} pa vrijedi da je $|\angle BAC| = |\angle CDA| = \alpha$.

Budući da je $|\angle BCD| = \frac{\gamma'}{2}$ i $|\angle DAC| + |\angle ACD| + |\angle CDA| = 180^\circ$, vrijedi jednačba

$$\alpha + \gamma + \frac{\gamma'}{2} + \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha + \gamma + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

$$2\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ / \cdot 2 \longrightarrow 4\alpha + \gamma = 180^\circ$$

Dalje slijedi

$$4(180^\circ - 4\gamma) + \gamma = 180^\circ$$

$$720^\circ - 16\gamma + \gamma = 180^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

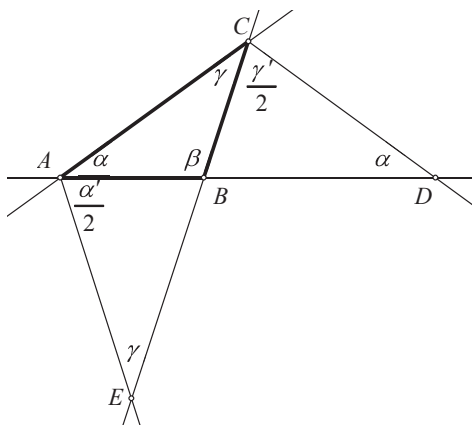
$$\gamma = 36^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 4 \cdot 36^\circ = 36^\circ, \beta = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Neka je $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle CBA| = \beta$ i $|\angle ACB| = \gamma$. Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo α' i γ' .

Tada je $\alpha' = \beta + \gamma$ i $\gamma' = \alpha + \beta$. 1 BOD

Trokut CAE je jednakokračan s osnovicom \overline{CE} pa vrijedi da je $|\angle CEA| = |\angle ACE| = \gamma$. Za zbroj

veličina kutova u trokutu CAE vrijedi $\gamma + \gamma + \left(\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = 180^\circ$, odnosno $\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{5}{2}\gamma = 180^\circ$.

2 BODA

Trokut ADC je jednakokrtačan s osnovicom \overline{AD} pa vrijedi da je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CDA| = \alpha$. Za zbroj

veličina kutova u trokutu ADC vrijedi $\alpha + \alpha + \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 180^\circ$, odnosno $\frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 180^\circ$.

2 BODA

Zbrajanjem dobivenih izraza nalazimo da je $\frac{7}{2}\alpha + \beta + \frac{7}{2}\gamma = 360^\circ$, odakle, zbog činjenice da je

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, slijedi da je $\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{2}\gamma = 180^\circ$, odnosno da je $\alpha + \gamma = 72^\circ$. 1 BOD

Oduzimanjem dobivenih izraza nalazimo da je $\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\gamma = 0$, odakle slijedi da je $\alpha - \gamma = 0$,

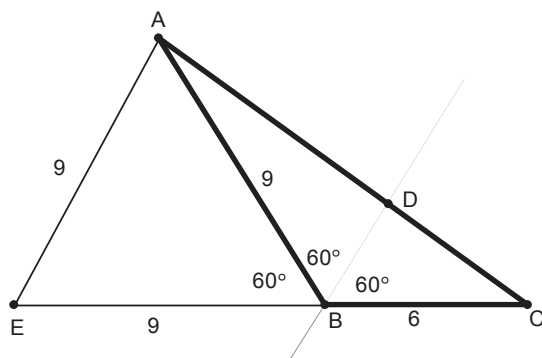
odnosno da je $\alpha = \gamma$. 1 BOD

Iz $\alpha + \gamma = 72^\circ$ i $\alpha = \gamma$ zaključujemo da je $\alpha = \gamma = 36^\circ$, pa je $\beta = 108^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica \overline{BC} trokuta ABC preko točke B . Točkom A nacrtaj se pravac usporedan sa simetralom kuta $\sphericalangle CBA$. Sjecište tog pravca i pravca BC označimo s E . 1 BOD

Trokut AEB je jednakostraničan s duljinama stranica od 9 dm jer je $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle CBD| = 60^\circ$

(kutovi s usporednim krakima) i $|\sphericalangle ABE| = 60^\circ$ ($\sphericalangle ABE$ i $\sphericalangle CBA$ su sukuti, $|\sphericalangle CBA| = 120^\circ$)

pa je i veličina trećeg kuta $|\sphericalangle BEA| = 60^\circ$. 3 BODA

Trokut AEC sličan je trokutu DBC prema poučku o sličnosti trokuta K-K ($\sphericalangle ACE$ zajednički kut oba trokuta, $|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle CBD| = 60^\circ$) te vrijedi: 2 BODA

$$|BC| : |EC| = |BD| : |EA|$$

$$6 : (6 + 9) = |BD| : 9$$

$$15 \cdot |BD| = 54$$

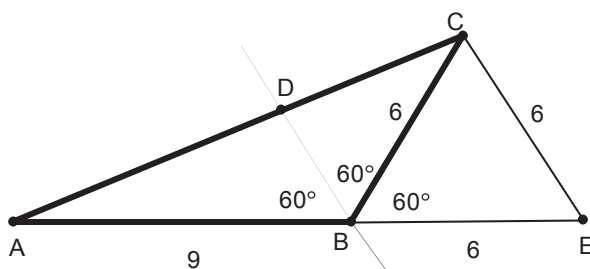
$$|BD| = 3.6 \text{ dm}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica \overline{AB} trokuta ABC preko točke B . Točkom C nacrta se pravac usporedan sa simetralom kuta $\sphericalangle CBA$. Sjecište tog pravca i pravca AB označimo s E .

1 BOD

Trokut CBE je jednakostraničan s duljinama stranica od 6 dm jer je $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle BCE| = 60^\circ$

(kutovi s usporednim kracima) i $|\sphericalangle EBC| = 60^\circ$ ($\sphericalangle EBC$ i $\sphericalangle CBA$ su sukuti, $|\sphericalangle CBA| = 120^\circ$)

pa je i veličina trećeg kuta $|\sphericalangle CEB| = 60^\circ$.

3 BODA

Trokut AEC sličan je trokutu ABD prema poučku o sličnosti trokuta K-K ($\sphericalangle BAC$ zajednički kut oba trokuta, $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle CEA| = 60^\circ$) te vrijedi:

2 BODA

$$|AB| : |AE| = |BD| : |EC|$$

$$9 : (6 + 9) = |BD| : 6$$

$$15 \cdot |BD| = 54$$

$$|BD| = 3.6 \text{ dm}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

6. razred-rješenja

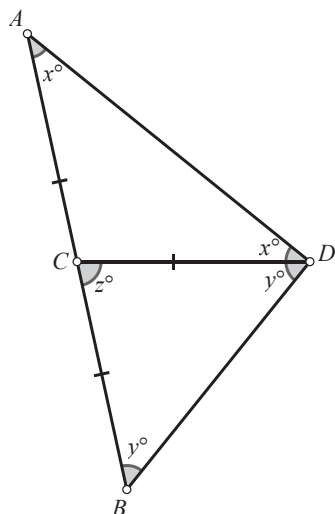
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

Posuda A	Posuda B	
U jednoj litri smjese $\frac{8}{15}l$ crvene $\frac{7}{15}l$ bijele	U jednoj litri smjese $\frac{11}{20}l$ crvene $\frac{9}{20}l$ bijele	2 boda
Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15}l$ bijele	Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20}l$ bijele	3 boda
U ostatku, tj. u 8 litara smjese ostalo $8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15}l$ bijele	U ostatku, tj. u 13 litara smjese ostalo $13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20}l$ bijele	3 boda
U posudi A bit će: $\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = \frac{413}{60} = 6\frac{53}{60}l$ bijele boje.	U posudi B bit će: $\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = \frac{547}{60} = 9\frac{7}{60}l$ bijele boje	2 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\angle ADC| = |\angle CAD| = x^\circ$. 1 BOD

Kut $\angle BCD$ je vanjski kut trokuta ACD koji je nasuprot unutarnjih kutova $\angle CAD$ i $\angle ADC$ pa vrijedi $z^\circ = x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$. 2 BODA

Trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\angle DBC| = |\angle CDB| = y^\circ$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut BCD vrijedi

$$|\angle DBC| + |\angle CDB| + |\angle BCD| = 180^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$y^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

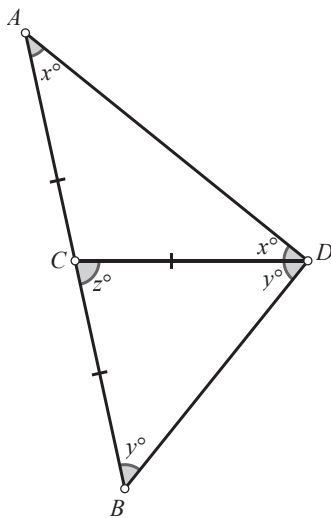
$$2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ + y^\circ = 90^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

Dakle, $|\angle ADB| = |\angle ADC| + |\angle CDB| = x^\circ + y^\circ = 90^\circ$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\angle ADC| = |\angle CAD| = x^\circ$. 1 BOD

Kut $\angle BCA$ je ispruženi kut pa iz uvjeta zadatka vrijedi da je $|\angle DCA| = 180^\circ - z^\circ$.

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut ACD vrijedi

$$|\angle DCA| + |\angle ADC| + |\angle CAD| = 180^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$180^\circ - z^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$2x^\circ = z^\circ$$

$$x^\circ = \frac{z^\circ}{2}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Analogno, trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle DBC| = y^\circ$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut BCD vrijedi

$$|\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle CDB| + |\sphericalangle DBC| = 180^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$z^\circ + y^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

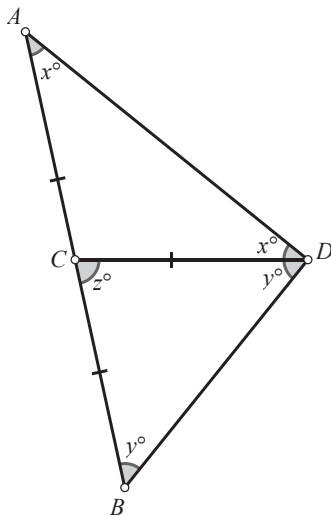
$$2y^\circ = 180^\circ - z^\circ$$

$$y^\circ = \frac{180^\circ - z^\circ}{2}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Na kraju, $|\sphericalangle ADB| = x^\circ + y^\circ = \frac{z^\circ}{2} + \frac{180^\circ - z^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



1 BOD

Trokut ACD je jednakokračan pa vrijedi $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CAD| = x^\circ$. 1 BOD

Trokut BCD je jednakokračan pa vrijedi $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle CDB| = y^\circ$. 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je 180° pa za trokut ABD vrijedi

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DBA| + |\sphericalangle ADB| = x^\circ + y^\circ + (x^\circ + y^\circ) = 2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ \quad 4 \text{ BODA}$$

odnosno $x^\circ + y^\circ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. 2 BODA

Dakle, $|\angle ADB| = x^\circ + y^\circ = 90^\circ$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

S obzirom da zbroj tisuću najmanjih uzastopnih pozitivnih cijelih brojeva iznosi

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500, \quad 2 \text{ BODA}$$

a naših traženih je 31500, najmanji traženi broj je negativan, a najveći pozitivan. 1 BOD

Zbroj $0 + 1 + 2 + \dots + 999$ se razlikuje od zbroja $1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ jer nema pribrojnik 1000, a ima pribrojnik 0. Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Zbroj $-1 + 0 + 1 + \dots + 998$ se razlikuje od zbroja $0 + 1 + 2 + \dots + 999$ jer nema pribrojnik 999, a ima pribrojnik -1 . Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Analogno, svaki sljedeći manji je za 1000. 1 BOD

Kako je $500\,500 - 31\,500 = 469\,000$ i $469\,000 : 1000 = 469$, 2 BODA

najveći od traženih brojeva je $1000 - 469 = 531$, 1 BOD

a najmanji je $1 - 469 = -468$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Razmatranje zbrojeva te zaključivanje o smanjivanju za 1000 boduje se s ukupno 3 boda.

Drugi način:

Prvi broj označimo s x . Slijede ga $x + 1, x + 2, \dots, x + 999$. 1 BOD

Vrijedi $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 999) = 31\,500$ 1 BOD

odnosno $1000x + (1 + 2 + \dots + 999) = 31\,500$. 2 BODA

Gaussovom dosjetkom izračunamo da je $1 + 2 + \dots + 999 = 499\,500$. 2 BODA

Vrijedi $1000x + 499\,500 = 31\,500$

$$1000x = -468\,000$$

$$x = -468. \quad 2 \text{ BODA}$$

Tada je $x + 999 = 531$. 1 BOD

Najmanji od traženih brojeva je broj -468 , a najveći je 531 . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = 31500$. 1 BOD

Prema Gaussovoj dosjetki je

$$a_1 + a_{1000} = a_1 + a_1 + 999 = 2a_1 + 999$$

$$a_2 + a_{999} = a_1 + 1 + a_1 + 998 = 2a_1 + 999$$

$$a_3 + a_{998} = a_1 + 2 + a_1 + 997 = 2a_1 + 999$$

...

$$a_{500} + a_{501} = a_1 + 499 + a_1 + 500 = 2a_1 + 999 \quad 3 \text{ BODA}$$

Zbrojivši sve ove jednakosti dobivamo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = 500 \cdot (2a_1 + 999). \quad 1 \text{ BOD}$$

Zato je $500 \cdot (2a_1 + 999) = 31500 \quad / : 500$

$$2a_1 + 999 = 63$$

$$2a_1 = 63 - 999 = -936 \quad / : 2$$

$$a_1 = -468 \quad 4 \text{ BODA}$$

Slijedi $a_{1000} = -468 + 999 = 531$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360^\circ : 12 = 30^\circ$. 2 BODA

Mala kazaljka se za $40 \text{ min} = \frac{2}{3} \text{ h}$ pomakne za $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$. 2 BODA

Dakle, u 3 sata i 40 minuta mala kazaljka otklonila se $3 \cdot 30^\circ + 20^\circ = 110^\circ$ od položaja 12 sati.

1 BOD

U jednome satu se velika kazaljka pomakne za puni krug odnosno 360° . 1 BOD

Dakle, u 3 sata i 40 minuta velika se kazaljka pomakla 240° od položaja 12 sati. 2 BODA

Manji kut između kazaljki iznosi $240^\circ - 110^\circ = 130^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360^\circ : 12 = 30^\circ$. 2 BODA

Mala kazaljka se za 40 min = $\frac{2}{3}$ h pomakne za $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$. 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 3 i 8 na satu je $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$. 3 BODA

Veličina kuta između kazaljki iznosi $150^\circ - 20^\circ = 130^\circ$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Za 40 minuta velika se kazaljka od 12 sati pomakne za $\frac{40}{60} \cdot 360^\circ = 240^\circ$. 2 BODA

Za 3 sata mala se kazaljka od 12 sati pomakne za $\frac{3}{12} \cdot 360^\circ = 90^\circ$. 2 BODA

Za 40 minuta mala se kazaljka od 3 sata pomakne za $\frac{40}{12 \cdot 60} \cdot 360^\circ = 20^\circ$. 3 BODA

Dakle, za 3 sata i 40 minuta mala se kazaljka od 12 sati pomakne za $90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$. 1 BOD

Manji kut između kazaljki analognog sata u 3 sata i 40 minuta iznosi $240^\circ - 110^\circ = 130^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi $360^\circ : 12 = 30^\circ$. 2 BODA

U 3 sata i 40 minuta velika kazaljka je na broju 8.

Veličina kuta između brojeva 8 i 12 na analognom satu je $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. 1 BOD

40 minuta je $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ sata. 1 BOD

Mala kazaljka za 1 sat prijede 30° , a za 40 minuta prijede $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$. 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 12 i 3 na analognom satu je $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$. 1 BOD

U 3 sata i 40 minuta mala kazaljka je od broja 12 udaljena za $90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$. 1 BOD

Veći kut između kazaljki je $120^\circ + 110^\circ = 230^\circ$. 1 BOD

Manji kut između kazaljki je $360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Neka su x_1, x_2, \dots, x_{11} traženi prirodni brojevi i $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$ njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi $x_1 + x_2 + \dots + x_{11} = 2016$. 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika x_1, x_2, \dots, x_{11} djeljiv s $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$, onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$. 2 BODA

S obzirom da je $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, 1 BOD

onda je $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ najmanji mogući umnožak faktora veći od 11. 3 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je

$2016 : 12 = 168$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka su x_1, x_2, \dots, x_{11} traženi prirodni brojevi i $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$ njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi $x_1 + x_2 + \dots + x_{11} = 2016$. 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika x_1, x_2, \dots, x_{11} djeljiv s $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$, onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$. 2 BODA

Djelitelji broja 2016 su 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, ... 2 BODA

a najmanji među njima koji je veći od 11 je broj 12. 2 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je

$2016 : 12 = 168$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je x broj krizantema prodanih prošle godine,

onda je $2x$ broj tulipana, a $3x$ broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Za zaradu od prodanog cvijeća redom vrijedi

$$x \cdot 9 + 2x \cdot 8 + 3x \cdot 10 = 275\ 000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9x + 16x + 30x = 275\ 000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$55x = 275\ 000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 275\ 000 : 55 = 5000 \quad 1 \text{ BOD}$$

Prošle je godine prodano 5 000 krizantema, 10 000 tulipana i 15 000 ruža. 3 BODA

Dakle, ukupno je prodano 30 000 cvjetova. 1 BOD



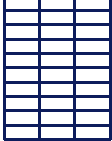
..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je x broj krizantema prodanih prošle godine, tada je $2x$ broj tulipana,

a $3x$ broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Neka je zarada od krizantema označena sa  x , od tulipana  $2x$, a od ruža .

Ukupna zarada od svega cvijeća (u iznosu od 275 000 kn) sastoji se od

$$9 + 16 + 30 = 55 \text{ jednakih dijelova.}$$

Vrijednost svakoga od tih dijelova je $275\ 000 : 55 = 5000$ kn. 2 BODA

Od krizantema je zarađeno $5000 \cdot 9 = 45\ 000$ kn, a budući da je cijena jedne krizanteme bila 9 kn,

prodano je ukupno $45\,000 : 9 = 5\,000$ krizantema. 1 BOD

Od tulipana je zarađeno $5000 \cdot 16 = 80\,000$ kn, a budući da je cijena jednog tulipana bila 8 kn,

prodano je ukupno $80\,000 : 8 = 10\,000$ tulipana. 2 BODA

Od ruža je zarađeno $5000 \cdot 30 = 150\,000$ kn, a budući da je cijena jedne ruže bila 10 kn,

prodano je ukupno $150\,000 : 10 = 15\,000$ ruža. 2 BODA

Ukupno je prodano $5\,000 + 10\,000 + 15\,000 = 30\,000$ cvjetova. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Rastavom broja 3915 na proste faktore dobiva se:

$3915 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$. 2 BODA

Kako se pomoću faktora rastava ne može dobiti niti 30, niti 31, posljednji dan u mjesecu bio je 29.,

1 BOD

a jedino prijestupna veljača ima 29 dana pa je povratak u 3. mjesecu.

1 BOD

Preostali brojevi iz rastava (3, 3 i 5) daju 3 rješenja:

1.) 9 dana zimovanja i petoro djece

Povratak je 8. 3.

2 BODA

2.) 5 dana zimovanja i devetoro djece

Povratak je 4. 3.

2 BODA

3.) 15 dana zimovanja i troje djece

Povratak je 14. 3.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Umnožak brojeva $\overline{61x}$ i $\overline{37y1}$ djeljiv je brojem 15 ako vrijedi jedna od mogućnosti:

a) barem jedan broj je djeljiv i brojem 3 i brojem 5 ili

b) jedan broj je djeljiv brojem 3, a drugi brojem 5.

2 BODA

Budući da broj $\overline{37y1}$ ima zadnju znamenku 1 (znamenku jedinice), taj broj ne može biti djeljiv

brojem 5 (znamenka jedinica mora biti 0 ili 5).

To ima za posljedicu da broj $\overline{61x}$ mora biti djeljiv brojem 5, tj. mora biti ili $x=0$ ili $x=5$.

2 BODA

Ako je $x=5$, onda je prvi broj jednak 615, a on je djeljiv i brojem 5 i brojem 3 (zbroj znamenaka

je 12). Dakle, djeljiv je brojem 15 pa će i umnožak broja 615 s bilo kojim brojem biti djeljiv s 15.

Zato znamenka y u broju $\overline{37y1}$ može biti bilo koja od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9.

3 BODA

Drugi broj može biti: 3701, 3711, 3721, 3731, 3741, 3751, 3761, 3771, 3781, 3791. 1 BOD

Ako je $x = 0$, onda je prvi broj jednak 610, a on nije djeljiv brojem 3 jer mu je zbroj znamenaka 7.

Zato broj $\overline{37y1}$ mora biti djeljiv brojem 3, tj. y može biti 1, 4 ili 7, odnosno drugi broj je u tom slučaju 3711, 3741 ili 3771.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Povežemo li svaku razinu s brojem malih trokutića na njoj, uočavamo da vrijedi:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića
3. razina – 5 trokutića
4. razina – 7 trokutića ... 1 BOD

Zaključujemo da će na 5. razini biti 9, na 6. razini 11 trokutića, itd... 1 BOD

tj. da će na n -toj razini biti $2n - 1$ trokutić. 1 BOD

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će $2 \cdot 100 - 1 = 199$ trokutića. 2 BODA

Ukupan broj trokutića dobije se zbrajanjem $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199$. 1 BOD

Primjenjujući Gaussovu dosjetku dobijemo

$$1 + 3 + 5 + \dots + 197 + 199 = (1 + 199) \cdot (100 : 2) = 200 \cdot 50 = 10000 . \quad 3 \text{ BODA}$$

Trokut sastavljen od 100 razina sadrži 10 000 trokutića. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Računanje zbroja $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199$ moguće je na više načina.

Taj zbroj se može izračunati i ovako

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199 &= \\ &= (1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) + \dots + (99 + 101) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 200 + 200 + 200 + \dots + 200 = (\text{ima } 50 \text{ pribrojnika}) & 1 \text{ BOD} \\ &= 50 \cdot 200 = 10\,000 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

ili ovako

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199 &= \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 199 + 200) - (2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200) = & 1 \text{ BOD} \\ &= (200 \cdot 201) : 2 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100) = \\ &= 100 \cdot 201 - 2 \cdot (100 \cdot 101 : 2) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 20\,100 - 10\,100 = 10\,000 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

i na druge načine.

Točno određivanje tog zbroja boduje se s 3 boda.

Drugi način:

U 1. razini je 1 trokutić.

U 1. i 2. razini je ukupno $1 + 3 = 4$ trokutića, pri čemu je $4 = 2 \cdot 2$. 1 BOD

U 1., 2. i 3. razini ukupno je $1 + 3 + 5 = 9$ trokutića, pri čemu je $9 = 3 \cdot 3$. 1 BOD

U 1., 2., 3. i 4. razini je ukupno $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ trokutića, pri čemu je $16 = 4 \cdot 4$. 1 BOD

U prvih pet razina nalazi se ukupno $5 \cdot 5 = 25$ trokutića,
u prvih šest razina broj trokutića je $6 \cdot 6 = 36$, 1 BOD

a to znači da trokut sastavljen od 100 razina sadrži $100 \cdot 100 = 10\,000$ trokutića. 1 BOD

Broj trokutića na pojedinoj razini nalazimo promatranjem početne situacije:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića, $3 = 2 \cdot 2 - 1$
3. razina – 5 trokutića, $5 = 2 \cdot 3 - 1$
4. razina – 7 trokutića, $7 = 2 \cdot 4 - 1 \dots$ 1 BOD

Na 5. razini bit će 9 ($9 = 2 \cdot 5 - 1$), na 6. razini 11 ($11 = 2 \cdot 6 - 1$) trokutića, itd....
tj. da će na n -toj razini biti $2n - 1$ trokutić. 2 BODA

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će $2 \cdot 100 - 1 = 199$ trokutića. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Zaključak da je ukupan broj trokutića u n razina jednak $n \cdot n$, odnosno da trokut

sastavljen od 100 razina sadrži $100 \cdot 100 = 10\,000$ trokutića, boduje se s 5 bodova, neovisno o tome razmatraju li se trokutići sadržani u pet i šest razina ili samo za (nacrtane) četiri razine.

5. Zbroj znamenaka svih jednoznamenkastih brojeva jednak je 45. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih dvoznamenkastih brojeva dobit ćemo tako da zbrojimo sve znamenke na mjestu desetica ($10 \cdot 45$) i sve znamenke na mjestu jedinica ($9 \cdot 45$):

$10 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 19 \cdot 45 = 855$. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1 do 99 (manjih od 100) jednak je $45 + 855 = 900$. 1 BOD

Zbroj znamenaka brojeva od 100 do 999 (svih troznamenkastih brojeva) jednak je zbroju svih znamenaka na mjestu stotica ($100 \cdot 45$) uvećanom za zbroj svih znamenaka u svim dvoznamenkastim „završetcima“ ($9 \cdot 900$):

$100 \cdot 45 + 9 \cdot 900 = 4500 + 8100 = 12\,600$. 2 BODA

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1000 do 1999 jednak je

$1000 \cdot 1 + 900 + 12\,600 = 14\,500$. 2 BODA

Zbroj znamenaka brojeva od 2000 do 2016 jednak je $17 \cdot 2 + 45 + 7 + 21 = 107$. 2 BODA

Ukupan zbroj svih znamenaka je $900 + 12\,600 + 14\,500 + 107 = 28\,107$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Bez obzira na način rješavanja, koraci u rješavanju moraju biti valjano argumentirani.

Ukoliko učenik točno postavi zadatak, a pogriješi samo pri računanju u nekom od dijelova zadatka, za svaku takvu pogrešku oduzeti samo bodove koje donosi taj dio zadatka, ali ne i bod za konačno rješenje.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$503 \cdot 32 + 75 \cdot (816 - 784) - (15 + 17) \cdot 94 = \quad 4 \text{ BODA}$$

$$= 503 \cdot 32 + 75 \cdot 32 - 32 \cdot 94 = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 16\,096 + 2400 - 3008 = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 15\,488 \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno rješenje bez računa bodovati s 4 boda.

Drugi način:

$$503 \cdot 32 + 75 \cdot (816 - 784) - (15 + 17) \cdot 94 = \quad 4 \text{ BODA}$$

$$= 503 \cdot 32 + 75 \cdot 32 - 32 \cdot 94 = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= (503 + 75 - 94) \cdot 32 = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 484 \cdot 32 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 15\,488 \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno rješenje bez računa bodovati s 4 boda.

2. Prvi način:

Iz uvjeta zadatka zaključujemo da se bazen praznio 3 sata i 48 minuta 2 BODA

odnosno $3 \cdot 60 + 48 = 228$ minuta. 2 BODA

Kako za 12 minuta istekne 1358 litara vode i $228 : 12 = 19$, 3 BODA

u bazenu je bilo $1358 \cdot 19 = 25802$ litre vode. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Iz uvjeta zadatka zaključujemo da se bazen praznio 3 sata i 48 minuta 2 BODA

Ako za 12 minuta istekne 1358 litara vode, onda će u jednom satu ($1\text{ h} = 60\text{ min} = 5 \cdot 12\text{ min}$)

isteći 5 puta više odnosno isteći će $1358 \cdot 5 = 6790$ litara vode. 2 BODA

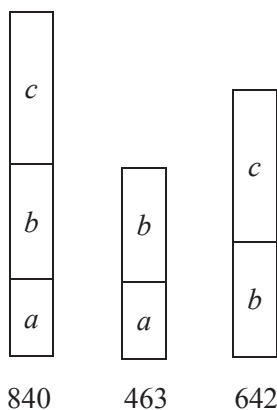
Za tri sata isteći će 3 puta više nego u jednom satu odnosno $6790 \cdot 3 = 20\,370$ litara. 2 BODA

Za 48 minuta isteći će 4 puta više nego u 12 minuta odnosno $1358 \cdot 4 = 5432$ litre. 2 BODA

Na kraju, u bazenu je bilo $20\,370 + 5432 = 25\,802$ litre vode. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:



1 BOD

Promatrajući 1. i 2. zaključujemo da je $c = 840 - 463 = 377$. 3 BODA

Dalje iz 3. slijedi $b = 642 - c = 642 - 377 = 265$. 3 BODA

Na kraju, iz 2. je $a = 463 - b = 463 - 265 = 198$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Povezujući odnose s grafičkog prikaza mogu se različitim redoslijedom izračunati

vrijednosti a , b , c i sve ih treba bodovati kao što je iznad prikazano.

Drugi način:

$$a + b + c = 840$$

$$a + b = 463$$

$$b + c = 642$$

1 BOD

Slijedi $463 + c = 840$ pa je $c = 840 - 463 = 377$. 3 BODA

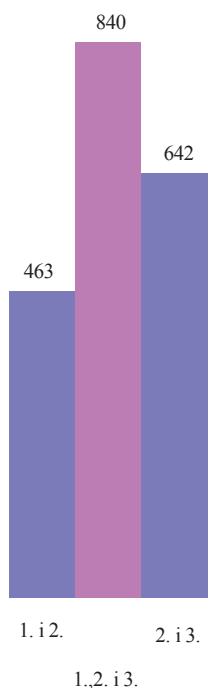
Dalje je $a + 642 = 840$ pa je $a = 840 - 642 = 198$. 3 BODA

Na kraju, $198 + b + 377 = 840$ pa je $b + 575 = 840$ odnosno $b = 265$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Povezujući odnose iz jednažbi mogu se različitim redoslijedom izračunati vrijednosti a , b , c i sve ih treba bodovati kao što je iznad prikazano.

Treći način:



Prvi i drugi zajedno s drugim i trećim iznose $463 + 642 = 1105$. 2 BODA

To znači da sva tri zajedno (što iznosi 840) i drugi (brojan dva puta) zajedno daju 1105. 2 BODA

Slijedi da razlika $1105 - 840 = 265$ daje drugi broj. 2 BODA

Prvi je broj $463 - 265 = 198$. 2 BODA

Treći je broj $642 - 265 = 377$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Neka su a , b i c redom brojevi iz zadatka.

Zbroj prvog i drugog $a + b = 463$. 1 BOD

Zbroj drugog i trećeg $b + c = 642$. 1 BOD

Ako zbrojimo ove dvije jednakosti, dobijemo $a + b + b + c = 1105$.

2 BODA

Udružimo li $(a + b + c) + b = 1105$ te uvrstimo zbroj sva tri, slijedi $840 + b = 1105$ odnosno

$b = 265$.

2 BODA

Prvi je broj $463 - 265 = 198$.

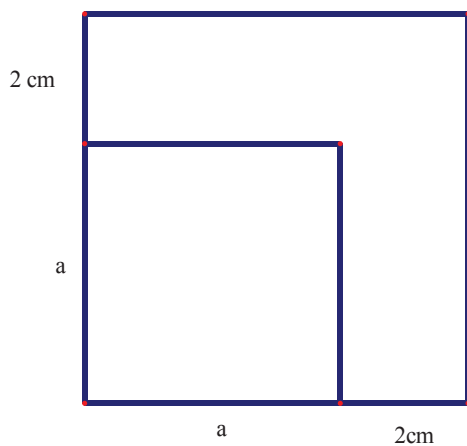
2 BODA

Treći je broj $642 - 265 = 377$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4.



$$4 \cdot a + 4 \cdot (a + 2) = 64$$

2 BODA

$$a + a + 2 = 16$$

1 BOD

$$2 \cdot a + 2 = 16$$

$$2 \cdot a = 14$$

1 BOD

$$a = 14 : 2$$

$$a = 7.$$

2 BODA

Opseg malog kvadrata je $4 \cdot 7 = 28$ cm.

1 BOD

Površina malog kvadrata je $7 \cdot 7 = 49$ cm².

1 BOD

Opseg velikog kvadrata je $4 \cdot 9 = 36$ cm.

1 BOD

Površina velikog kvadrata je $9 \cdot 9 = 81$ cm².

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. $\sphericalangle aVb$, $\sphericalangle aVc$, $\sphericalangle aVd$, $\sphericalangle bVc$, $\sphericalangle bVd$, $\sphericalangle bVe$, $\sphericalangle cVd$, $\sphericalangle cVe$, $\sphericalangle dVe$, $\sphericalangle dVf$, $\sphericalangle eVf$,
 $\sphericalangle eVg$, $\sphericalangle eVh$, $\sphericalangle eVi$, $\sphericalangle fVg$, $\sphericalangle fVh$, $\sphericalangle fVi$, $\sphericalangle gVh$, $\sphericalangle gVi$, $\sphericalangle hVi$.

Broj kutova	1, 2, 3	4, 5	6, 7	8, 9	10, 11	12, 13	14, 15	16, 17	18, 19	20
Bodovi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Za zapis s negativnom orijentacijom ne umanjivati broj bodova. Za neispravan zapis (npr. $\sphericalangle abV$) umanjiti za 1 do najviše 3 boda razmjerno broju šiljastih kutova.