Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

1. Skratite razlomak:
$$\frac{2016^{3n+2}-2016^5}{2016^{2n+3}+2016^{n+4}+2016^5}.$$

2. Na pitanje koliko minuta dnevno provede na društvenim mrežama, Iva je odgovorila: "Deveterokratnik tog broja je između 1100 i 1200, a trinaesterokratnik između 1500 i 1600." Koliko minuta dnevno Iva provede na društvenim mrežama?

3. Nad stranicama trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su polukrugovi čije su površine jednake 9π, 16π i 25π. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

4. Pješak koji prelazi 1km za 12 minuta, prijeđe put od A do B za isto vrijeme za koje biciklist prijeđe 10km duži put, kada za $4\frac{1}{2}$ minuta prelazi 1km. Odredite udaljenost od A do B.

5. Za realne brojeve a, b, c, koji nisu jednaki nuli, vrijedi $a+b+c=0$. Koliko je
$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}?$$

$*\quad *\quad *$

6. Student je u toku petogodišnjeg studija položio 31 ispit. Svake godine je dao više ispita nego prethodne, a na petoj godini je dao tri puta više ispita nego na prvoj. Koliko je ispita student položio na četvrtoj godini?

7. Duljina stranice kvadrata iznosti 12 cm. Iz kvadrata se izrežu 4 jednakokračna trokuta kojima su osnovice stranice kvadrata, a duljine visina 3 cm. Preostali dio kvadrata je mreža četverostrane piramide. Izračunajte obujam i oplošje te piramide.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

1. Odredite zbroj rješenja jednadžbe $\left|\dfrac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8}\right|=2$.

2. Dužina $\overline{AD}$ podijeljena je točkama B i C na tri jednaka dijela. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ promjeri su kružnica k_1, k_2, k_3 sa središtima redom u točkama $P \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$, $S \in \overline{CD}$. Iz točke A povučena je tangenta na kružnicu k_3 s diralištem u točki G. Tangenta AG odsijeca na kružnici k_2 tetivu $\overline{EF}$. Odredite duljinu tetive $\overline{EF}$ ako duljina dužine $\overline{AD}$ iznosi 90cm.

3. Dino je naslijedio voćnjak s 50 stabala mandarina. Međutim, Dino bi svojoj djeci želio u nasljedstvo ostaviti i određeni broj stabala koja je on zasadio. Ako je rodna godina, svako će stablo dati 800 mandarina. Za svako dodatno zasađeno stablo u tom voćnjaku urod će se po stablu umanjiti za 10 mandarina. Koliko novih stabala Dino treba zasaditi u voćnjaku kako bi ukupan urod mandarina bio maksimalan? Koliko iznosi maksimalni urod?

4. Neka je $ABCD$ paralelogram, a M polovište stranice $\overline{DC}$. Ako točka M leži na simetrali kuta DAB, odredite mjeru kuta AMB.

5. Odredite sve uređene trojke prirodnih brojeva (a,b,c) za koje vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} ab+bc&=44,\\ ac+bc&=23.\end{aligned}$$

$*\quad *\quad *$

6. Ako je

$$f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n, \quad \text{gdje je } n\in\mathbb{N}, i^2=-1,$$

koliko je $f(n+2016)-f(n-2016)$?

7. Rješenja jednadžbe

$$\frac{(a-x)^3+(b-x)^3}{(a-x)^2+(b-x)^2}=a-b, \quad \text{gdje su } a,b\in\mathbb{R}$$

su uzastopni višekratnici broja 6 kojima je zbroj kvadrata 4068. Odredite $a\cdot b$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

1. Ako je $\dfrac{5\cos\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}}{3\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{15}{13}$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, koliko je $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$?

2. Odredite sve cijele brojeve p za koje jednadžba $\sin(px) = \frac{1}{p}$ ima 2016 rješenja na intervalu $\langle 0, 2\pi]$.

3. Trokutu ABC upisana je kružnica. Diralište sa stranicom $\overline{AB}$ dijeli tu stranicu na dijelove kojima su duljine u omjeru $2 : 3$. Polumjer kružnice jednak je petini duljine stranice $\overline{AB}$. Odredite mjeru kuta nasuprot stranice $\overline{AB}$?

4. Za duljine kateta pravokutnog trokuta a i b vrijedi jednakost

$$\log(a+b) = \frac{1}{2}\cdot\log b + \frac{1}{2}\cdot\log(a+3b).$$

Izračunajte mjeru kuta nasuprot katete duljine a.

5. Koje sve vrijednosti mogu poprimiti znamenke a i b tako da zbroj brojeva $\overline{29a8}$ i $\overline{342b}$ bude djeljiv s 18?

* * *

6. Odredite ukupnu duljinu svih intervala realnih brojeva koji su rješenje sustava nejednadžbi

$$12^{\sin(2x)} \cdot 14^{\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}} \geqslant \sqrt[4]{2016}, \quad |x| \leqslant 2016\pi.$$

7. Osnovka piramide je pravokutni trokut sa stranicama duljina 1, a, a^2, $a > 1$. Vrh piramide se ortogonalno projicira u vrh pravog kuta osnovke. Šiljasti kut nasuprot stranice duljine 1 jednak je kutu pod kojim je jedna pobočka nagnuta prema osnovki. Izračunajte obujam piramide.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

21. siječnja 2016.

1. Za koje će prirodne brojeve n izraz $\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$ biti realan broj? Koliko je takvih brojeva n koji su manji od 2016?

2. U razvoju binoma $\left(\sqrt{6^x}+\frac{1}{\sqrt{6^{x+1}}}\right)^n$ omjer koeficijenata trećeg i drugog člana je $7:2$. Odredite x tako da je četvrti član u razvoju binoma jednak 2016.

3. Učiteljica Vesna odlučila je zasladiti dan svojim učenicima kojih je 200 u razredu. Kupila je 33 čokoladice Životinjsko carstvo i 101 čokoladnu torticu. Svi učenici su bili taj dan na nastavi i svatko je dobio jedan originalno zapakiran slatkiš. Objasnite kako je to moguće? Koliko je učenica, a koliko učenika u tom razredu ako su njihovi brojevi u omjeru $3:5$?

4. Središtem kružnice $2x^2+2y^2-4x+8y-20=0$ prolaze pravci zadani jednadžbama $mx-y+3=0$ i $x-ny+2=0$. Odredite kut koji zatvaraju ti pravci.

5. Za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+2}=\cdots=\frac{x_{2016}}{x_{2016}+2016}, \quad x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2016}=2017.$$

Izračunajte x_{1008}.

$$* \quad * \quad *$$

6. U trokutu ABC duljine stranica iznose $|\overline{AB}|=7$, $|\overline{BC}|=8$ i $|\overline{AC}|=9$. Točka D nalazi se na stranici $\overline{AC}$ tako da je $\sphericalangle CBD=45^\circ$. Odredite duljinu dužine $\overline{BD}$ i omjer površina trokuta ABC i DBC.

7. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu $z^3+|z|=0$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.