Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

1. Postoje li tri uzastopna cijela broja čiji je zbroj kvadrata djeljiv s 2016?

2. Anja i Vanja su sudjelovale u utrci. Broj trkača koji su završili utrku prije Anje jednak je broju trkača koji su završili nakon nje. Broj trkača koji su završili utrku prije Vanje je tri puta veći od broja trkača koji su završili nakon nje. Točno 10 trkača završilo je utrku između Anje i Vanje. Ako su svi trkači završili utrku, te nikoja dva trkača nisu završila u isto vrijeme, odredi ukupan broj trkača.

3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a^2 + b^2 = 8$ i $a^6 + b^6 = 416$.

Odredi ab.

4. Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9. Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici?

5. Dan je kvadrat $ABCD$ stranice duljine a. Vrhovi A i C središta su dviju kružnica koje prolaze točkama B i D. Ako su sjecišta tih kružnica s dijagonalom $\overline{AC}$ točke M i N, odredi površinu četverokuta $BMDN$.

$* \quad * \quad *$

6. Duljine kateta pravokutnog trokuta su a i b, a duljina njegove hipotenuze c. Ako je veličina jednog kuta $75°$, dokaži da vrijedi $c^2 = 4ab$.

7. Na otoku je 20 klubova. Svaki stanovnik otoka je član jednog ili dva kluba. Svaki klub ima najviše 25 članova, te za svaki par klubova postoji stanovnik koji je član oba kluba. Odredi najmanji i najveći mogući broj stanovnika otoka.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

1. Odredi sve realne brojeve c za koje je jedno rješenje kvadratne jednadžbe

$$27x^2 - 12x + c = 0$$

kvadrat drugog rješenja.

2. Neka je $a = 123456789$ i $N = a^3 - 2a^2 - 3a$. Dokaži da je broj N djeljiv s 540.

3. Neka je $w \neq 1$ kompleksni broj takav da vrijedi $|w| = 1$ i neka je $z = \dfrac{2}{1-w}$. Odredi $\operatorname{Re} z$.

4. Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$.

Odredi $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE$.

5. Jednog jutra, 11 prijatelja odlučilo je obojati veliku ogradu. Bojanje je počelo u 9 sati i završilo u 16 sati. Svatko je započeo na puni sat i radio točno dva sata. Možemo li biti sigurni da je u nekom periodu istovremeno radilo barem četvero prijatelja?

* * *

6. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa središtem O i neka su točke P i Q na dijagonali $\overline{AC}$ takve da je $|AP| = |PQ| = |QC|$. Ako pravac PB siječe stranicu $\overline{AD}$ u točki M, a pravac BQ siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki N, dokaži da su površine trokuta MPO i NQO jednake.

7. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Kvadrat $ABCD$ je podijeljen na n^2 pravokutnika pravcima $p_1, \ldots, p_{n-1}$ paralelnim s pravcem AB i pravcima $q_1, \ldots, q_{n-1}$ paralelnim s pravcem BC. Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ leže redom na pravcima p_0 i p_n, a stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ redom na pravcima q_0 i q_n. Pravac p_i se nalazi između pravaca p_{i-1} i p_{i+1}, a pravac q_i se nalazi između pravaca q_{i-1} i q_{i+1}, za sve $i = 1, \ldots, n-1$. Neka je $A_{i,j}$ pravokutnik omeđen pravcima p_{i-1}, p_i, q_{j-1} i q_j, za $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Ako je poznato da pravokutnici $A_{i,j}$ i $A_{j,i}$ imaju jednake površine za svaki par (i, j) takav da je $1 \leqslant i < j \leqslant n$, dokaži da je $A_{i,i}$ kvadrat za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

1. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $1 < a, b \leqslant 100$ i

$$\frac{1}{\log_a 10} + \frac{1}{\log_b 10}$$

prirodni broj.

2. Neka je ABC trokut s težištem T u kojem su točke D i E redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Ako je trokut ATE jednakostraničan, odredi kosinus kuta $\sphericalangle DAB$.

3. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\sin(x^2 - 5y) - 1 \geqslant \frac{x^4}{2016}.$$

4. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$ duljine brida a. Ako je P ortogonalna projekcija točke B na prostornu dijagonalu $\overline{AC'}$, odredi volumen piramide $ABCDP$.

5. Kvadrat je podijeljen na konačan broj manjih kvadrata čiji opsezi su prirodni brojevi. Mora li i opseg početnog kvadrata biti prirodni broj?

* * *

6. Odredi sve vrijednosti realnog parametra a takve da za svaki realni broj x vrijedi

$$\sin^2 x + a\cos x + a^2 \geqslant 1 + \cos x.$$

7. Nađi sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^n - 3$ djeljiv s 10.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

21. siječnja 2016.

1. Dan je niz $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

Odredi a_{2016}.

2. Iz intervala $[0,1]$ na slučajan način biraju se brojevi a i b. Kolika je vjerojatnost da jednadžba $ax^2 + bx + a = 0$ nema realnih rješenja?

3. Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dužina $\overline{BE}$ siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki G, a dužinu $\overline{DF}$ u točki H. Ako je $|CG| = |HG| = 3$, $|BG| = |HD| = 2$ i $|HF| = 5$, odredi $|AC|$.

4. Neka su a, b i c cijeli brojevi. Ako je broj $4a + 5b - 3c$ djeljiv s 19, dokaži da je i broj $6a - 2b + 5c$ djeljiv s 19.

5. Je li moguće obojati svako polje ploče dimenzija 8×8 jednom od 16 boja tako da za svake dvije boje postoje dva susjedna polja obojana u te dvije boje?

Dva polja su susjedna ako imaju jednu zajedničku stranicu.

* * *

6. Parabola $y = x^2 + ax + b$ siječe koordinatne osi u tri različite točke A, B i C. Središte kružnice opisane trokutu ABC leži na pravcu $y = x$. Dokaži da je $a + b + 1 = 0$.

7. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x^2 - y! = 2016$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.