Zadatak B-2.7. Rješenja jednadžbe

$$\frac{(a-x)^3+(b-x)^3}{(a-x)^2+(b-x)^2}=a-b; a,b,\in R.$$

su uzastopni višekratnici broja 6 kojima je zbroj kvadrata 4068. Odredite $a \cdot b$.

Rješenje.

Nakon sređivanja izraza

$$(a-x)^3+(b-x)^3=(a-b)((a-x)^2+(b-x)^2),$$

1 bod

dobivamo

$$(b-x)(2x^2-x(a+3b)+a^2+2b^2-ab)=0$$

1 bod

Imamo nekoliko mogućnosti.

Prva mogućnost.
Jedno rješenje ove jednadžbe je $x=b$.

1 bod

Ako je to jedino rješenje mora vrijedi $b^2=4068$, a tada b nije prirodan broj, pa niti višekratnik broja 6.

1 bod

Druga mogućnost.
Jedno rješenje je $x=b=6k$.
Ako jednadžba ima dva rješenja, onda kvadratna jednadžba $2x^2-x(a+3b)+a^2+2b^2-ab=0$ ima jedno rješenje, pa je njezina diskriminanta jednaka 0.

1 bod

$$D=0, \qquad x=\frac{a+3b}{4}=6k\pm 6.$$

Sada je

$$(6k)^2+(6k\pm 6)^2=4068,$$
$$k^2\pm k=56, k\in N$$
$$k=7 \; ili \; k=8$$

1 bod

$Za\ k=7\ je\ \ b=x=42\ ili\ \ x=48.$
$b=42, a=66.$

1 bod

$Za\ k=8\ je\ \ b=x=48\ ili\ \ x=42.$
$b=48, a=24.$

1 bod

Treća mogućnost.
Jedno rješenje je $x=b=6k$.
Kvadratna jednadžba $2x^2-x(a+3b)+a^2+2b^2-ab=0$ ima dva rješenja i vrijedi

$${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=4068,$$
$$(x_2-6)^2+{x_2}^2+(x_2+6)^2=4068,$$
$$3{x_2}^2=4014$$

Ova jednadžba nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

1 bod

Prema tome rješenje zadatka je

$$\boldsymbol{a\cdot b=2772 \text{ ili } 1152.}$$

1 bod