DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak A-1.1.

Ako su a i b prirodni brojevi, onda je $\overline{\overline{a.b}}$ decimalni broj dobiven tako da iza broja a zapišemo decimalnu točku i nakon toga broj b. Na primjer, ako je $a = 20$ i $b = 17$, onda je $\overline{\overline{a.b}} = 20.17$ i $\overline{\overline{b.a}} = 17.2$.

Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $\overline{\overline{a.b}} \cdot \overline{\overline{b.a}} = 13$.

Rješenje.

Ako je (a, b) rješenje tada je i (b, a) rješenje, i obratno. Stoga pretpostavimo da vrijedi $a \geqslant b$.

Ako je $a \geqslant 10$, onda je nužno $b = 1$, a mogućnosti za a su samo 10, 11 i 12.

Direktnom provjerom vidimo da u tim slučajevima umnožak nije 13.

Dakle, brojevi a i b su oba manji od 10, tj. to su znamenke. Traženi uvjet je ekvivalentan uvjetu

$$\overline{ab} \cdot \overline{ba} = 1300.$$

Budući da umnožak ima zadnju znamenku nula 0, uz pretpostavku $a \geqslant b$ jedina mogućnost je $a = 5$, $b = 2$. Provjerom vidimo $5.2 \cdot 2.5 = 13$, tj. ti brojevi zaista zadovoljavaju uvjet zadatka.

Prema tome, rješenja su $(a, b) = (2, 5)$ i $(a, b) = (5, 2)$.

Zadatak A-1.2.

Neka su a i b cijeli brojevi različite parnosti. Dokaži da postoji cijeli broj c takav da su brojevi $ab + c$, $a + c$ i $b + c$ kvadrati cijelih brojeva.

Rješenje.

Za proizvoljne a i b različite parnosti, definiramo

$$c = \frac{1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b - 2ab}{4}.$$

Uočimo da je c cijeli broj jer su a i b različite parnosti (npr. ako je a paran i b neparan, onda su $1 - 2b + b^2 = (1 - b)^2$ i $a^2 - 2a - 2ab$ očito djeljivi s 4).

Tada je

$$\begin{aligned}
a + c &= \frac{1 + a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab}{4} = \left(\frac{1 + a - b}{2}\right)^2, \\
b + c &= \frac{1 + a^2 + b^2 - 2a + 2b - 2ab}{4} = \left(\frac{1 - a + b}{2}\right)^2, \\
ab + c &= \frac{1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab}{4} = \left(\frac{1 - a - b}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Budući da su a i b različite parnosti, brojevi $1 + a - b$, $1 - a + b$ i $1 - a - b$ su parni, pa slijedi tvrdnja zadatka.

Napomena: Broj c naveden u rješenju nije jedinstven s traženim svojstvom. Na primjer, za $a = 3$ i $b = 120$, uvjete zadatke zadovoljavaju i $c = 1$ i $c = 3361$.

Napomena: Pronalaženje formule koja izražava c pomoću a i b je sastavni dio rješavanja zadatka, iako taj postupak nije bitan za zapisivanje potpunog rješenja. Budući da formula nije očita, želimo pokazati kako do nje možemo doći deduktivno.

Jedna ideja je tražiti c takav da $a + c$ i $b + c$ budu kvadrati uzastopnih cijelih brojeva. Tada možemo pisati $a+c = n^2$ i $b+c = (n+1)^2$ za neki cijeli broj n. U tom slučaju je $b-a = 2n+1$, tj.

$$n = \frac{b-a-1}{2} \quad \text{i} \quad c = \left(\frac{b-a-1}{2}\right)^2 - a = \frac{1+a^2+b^2-2a-2b-2ab}{4}.$$

Pokažimo još jedan način. Pretpostavimo da su c, k, n i m cijeli brojevi takvi da vrijedi

$$k^2 = c + ab, \quad n^2 = c + a \quad \text{i} \quad m^2 = c + b.$$

Tada vrijedi

$$k^2 - n^2 = (k-n)(k+n) = a(b-1) \quad \text{i} \quad k^2 - m^2 = (k-m)(k+m) = b(a-1).$$

Tražimo jednu moguću vezu između brojeva k, n, a i b koja zadovoljava ove dvije jednakosti i za koju će vrijediti i uvjeti zadataka.

Na primjer, prva jednakost će biti zadovoljena ako stavimo $a = k-n$, $b-1 = k+n$, a druga ako stavimo $b = k+m$ i $a-1 = k-m$. U tom slučaju je $m = n+1$ i $n = b-1-k = b-1-a-n$, odnosno

$$n = \frac{b-a-1}{2}.$$

Zadatak A-1.3.

Ako su x, y, z i w pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{x}{y+z+w} + \frac{y}{z+w+x} + \frac{z}{w+x+y} + \frac{w}{x+y+z} = 1,$$

odredi

$$\frac{x^2}{y+z+w} + \frac{y^2}{z+w+x} + \frac{z^2}{w+x+y} + \frac{w^2}{x+y+z}.$$

Prvo rješenje.

Pomnožimo li uvjet s $x + y + z + w$, dobivamo:

$$\frac{x^2+x(y+z+w)}{y+z+w} + \frac{y^2+y(x+z+w)}{z+w+x} + \frac{z^2+z(x+y+w)}{w+x+y} + \frac{w^2+w(x+y+z)}{x+y+z} = x+y+z+w,$$

tj.

$$\frac{x^2}{y+z+w} + x + \frac{y^2}{z+w+x} + y + \frac{z^2}{w+x+y} + z + \frac{w^2}{x+y+z} + w = x+y+z+w.$$

Odavde slijedi

$$\frac{x^2}{y+z+w} + \frac{y^2}{z+w+x} + \frac{z^2}{w+x+y} + \frac{w^2}{x+y+z} = 0.$$

Drugo rješenje.

Označimo $s = x + y + z + w$. Tada je

$$\frac{x}{y+z+w} = \frac{s-(y+z+w)}{y+z+w} = \frac{s}{s-x} - 1,$$

i analogno za ostale pribrojnike. Početni uvjet dakle glasi

$$\frac{s}{s-x} + \frac{s}{s-y} + \frac{s}{s-z} + \frac{s}{s-w} = 5.$$

Također možemo zapisati

$$\frac{x^2}{y+z+w} = \frac{x^2-s^2}{s-x} + \frac{s^2}{s-x} = \frac{(x-s)(s+x)}{s-x} + s\cdot\frac{s}{s-x} = -(s+x) + s\cdot\frac{s}{s-x},$$

i analogno za ostale pribrojnike.

Traženi zbroj iznosi

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{y+z+w} + \frac{y^2}{z+w+x} + \frac{z^2}{w+x+y} + \frac{w^2}{x+y+z} \\
&\quad = s\left(\frac{s}{s-x} + \frac{s}{s-y} + \frac{s}{s-z} + \frac{s}{s-w}\right) - (s+x) - (s+y) - (s+z) - (s+w) \\
&\quad = 5s - 4s - (x+y+z+w) = s - s = 0.
\end{aligned}$$

Treće rješenje.

Prebacimo li sve osim prvog pribrojnika u uvjetu na drugu stranu i pomnožimo s x, dobivamo

$$\frac{x^2}{y+z+w} = x - \frac{xy}{z+w+x} - \frac{xz}{w+x+y} - \frac{xw}{x+y+z}.$$

Analogno, ostavljanjem svakog od preostala tri pribrojnika iz uvjeta s jedne strane i množenjem s y, z, w redom, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{z+w+x} &= y - \frac{xy}{y+z+w} - \frac{yz}{w+x+y} - \frac{yw}{x+y+z} \\
\frac{z^2}{w+x+y} &= z - \frac{xz}{y+z+w} - \frac{yz}{z+w+x} - \frac{zw}{x+y+z} \\
\frac{w^2}{w+x+y} &= w - \frac{xw}{y+z+w} - \frac{yw}{z+w+x} - \frac{zw}{w+x+y}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem te četiri jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{y+z+w} + \frac{y^2}{z+w+x} + \frac{z^2}{w+x+y} + \frac{w^2}{x+y+z} \\
&\quad = x+y+z+w - \frac{x(y+z+w)}{y+z+w} - \frac{y(z+w+x)}{z+w+x} - \frac{z(w+x+y)}{w+x+y} - \frac{w(x+y+z)}{x+y+z} \\
&\quad = x+y+z+w-x-y-z-w = 0.
\end{aligned}$$

Zadatak A-1.4.

Neka je ABC šiljastokutni trokut. Točka B' je osnosimetrična slika točke B s obzirom na pravac AC, a točka C' je osnosimetrična slika točke C s obzirom na pravac AB. Kružnice opisane trokutima ABB' i ACC' sijeku se u točkama A i P. Dokaži da središte kružnice opisane trokutu ABC leži na pravcu AP.

Prvo rješenje.

Neka je $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$. Točka P nalazi se na kružnici opisanoj trokutu $AC'C$, pa vrijedi $\sphericalangle APC = \sphericalangle AC'C$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AC}$. Zbog osne simetrije je $\sphericalangle AC'C = 90° - \sphericalangle BAC' = 90° - \alpha$.

Analogno, promatrajući kružnicu opisanu trokutu ABB', zaključujemo

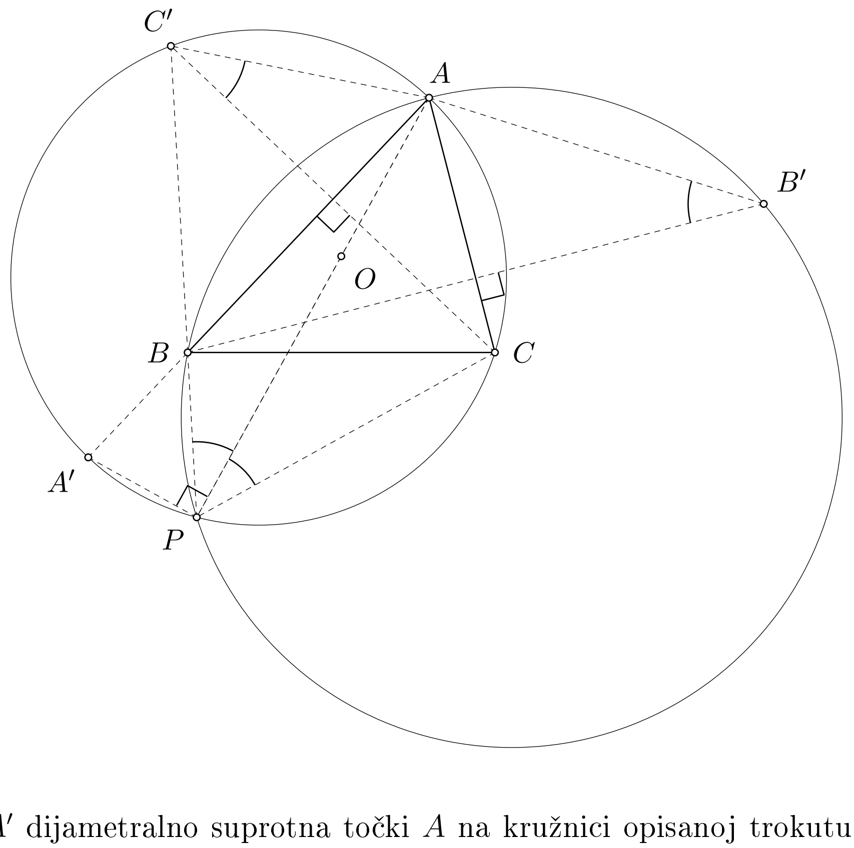
$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AB'B = 90° - \alpha.$$

Stoga vrijedi $\sphericalangle CPB = \sphericalangle APC + \sphericalangle APB = 180° - 2\alpha$.

Budući da je $AC'PC$ tetivni četverokut, vrijedi

$$\sphericalangle CPC' = 180° - \sphericalangle CAB - \sphericalangle BAC' = 180° - 2\alpha.$$

Dakle, $\sphericalangle CPB = \sphericalangle CPC'$, pa su točke P, B i C' kolinearne.



Neka je točka A' dijametralno suprotna točki A na kružnici opisanoj trokutu $AC'C$. Budući da je AB simetrala dužine $\overline{CC'}$, točka A' leži na pravcu AB. Zato je $\sphericalangle A'BP = \sphericalangle ABC' = \beta$. Prema Talesovom poučku je $\sphericalangle APA' = 90°$, pa je

$$\sphericalangle BPA' = 90° - \sphericalangle APB = \alpha.$$

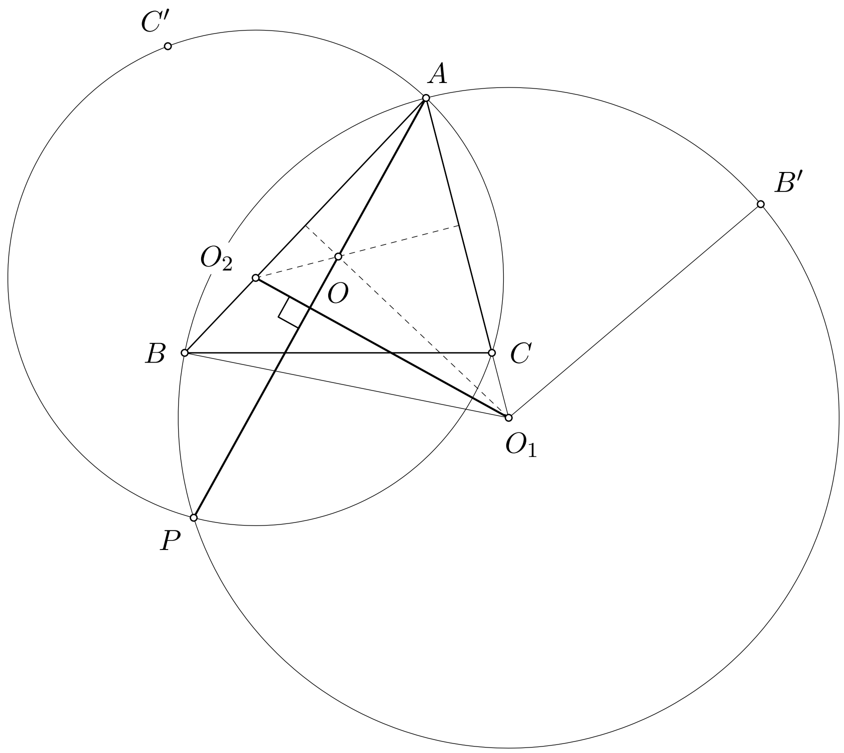
Dakle, $\sphericalangle AA'P = 180° - \alpha - \beta = \gamma$ i $\sphericalangle A'AP = 90° - \sphericalangle AA'P = 90° - \gamma$, tj. $\sphericalangle BAP = 90° - \gamma$.

S druge strane je $\sphericalangle BOA = 2\gamma$ i $\sphericalangle BAO = 90° - \gamma$, pa zaključujemo da su točke A, O i P na jednom pravcu. Time je dokaz završen.

Drugo rješenje.

Neka je O_1 presjek pravca AC i simetrale stranice $\overline{AB}$. Uočimo da je zbog osne simetrije $|BO_1| = |B'O_1|$, tj. O_1 je središte opisane kružnice trokuta ABB'.

Analogno, definiramo točku O_2 kao presjek pravca AB i simetrale stranice $\overline{AC}$, te vidimo da je ona središte opisane kružnice trokuta ACC'.



Budući da je $\overline{AP}$ zajednička tetiva dviju kružnica, pravac AP okomit je na pravac O_1O_2.

Simetrale stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ sijeku se u O, tj. OO_1 je okomito na AB i OO_2 je okomito na AC. Dakle, O je ortocentar trokuta AO_2O_1. Zaključujemo da je pravac AO okomit na pravac O_1O_2.

Dokazali smo da su pravci AO i AP okomiti na O_1O_2, iz čega zaključujemo da su točke A, O i P su kolinearne.

Zadatak A-1.5.

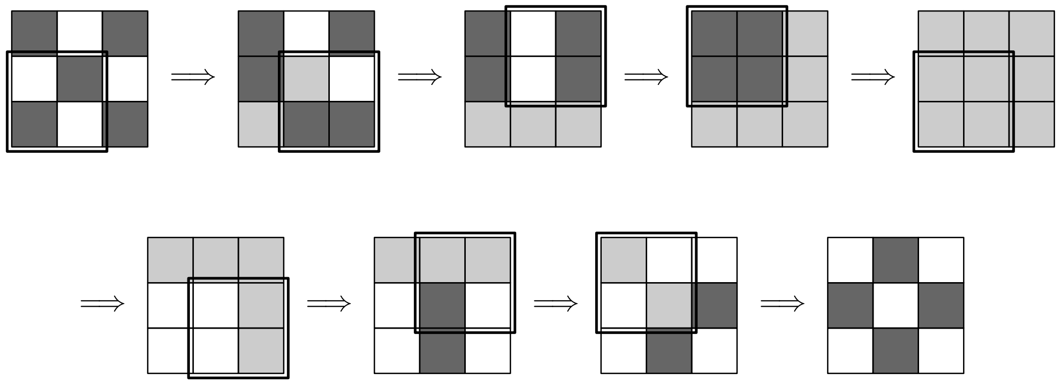
Polja ploče dimenzija $N \times N$ obojana su u crno i bijelo tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različite boje i tako da je barem jedno polje u kutu ploče crne boje. U pojedinom koraku odabire se kvadrat dimenzija 2×2 i sva četiri polja unutar tog kvadrata mijenjaju boju tako da bijela polja postaju crna, crna postaju siva, a siva postaju bijela.

Odredi sve prirodne brojeve $N > 1$ za koje je konačnim nizom opisanih koraka moguće postići da sva polja koja su na početku bila crna budu bijela i da sva polja koja su na početku bila bijela budu crna.

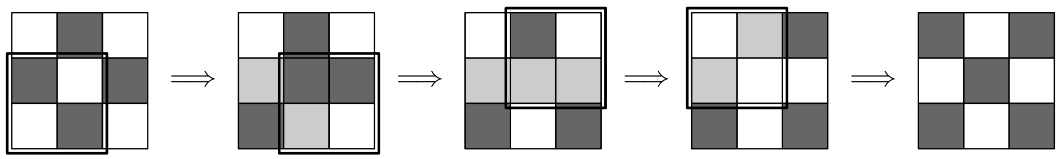
Rješenje.

Tvrdimo da su traženi brojevi svi višekratnici broja 3.

Uočimo da je za $N = 3$ moguće postići da crna postanu bijela i obratno tako da dva puta odaberemo svaki od četiri kvadrata dimenzija 2×2.



Također, za ploču dimenzija 3×3 kojoj su polja u kutu i središnje polje bijelo, a ostala polja crna, možemo postići da crna postanu bijela i obratno tako da jednom odaberemo svaki od četiri kvadrata dimenzija 2×2.



Ako 3 dijeli N, onda ploču možemo podijeliti na disjunktne ploče dimenzija 3×3. Prema prethodnom zaključujemo da za sve takve N možemo postići da crna polja postanu bijela i obratno.

Tvrdimo da ako 3 ne dijeli N, nije moguće postići da crna polja postanu bijela i obratno. Neka je $N = 3K + L$ za $L \in \{1, 2\}$ i $K \in \mathbb{N}$.

Uočimo da će crno polje postati bijelo ako i samo ako broj koraka u kojima mijenjamo boju tog polja daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Analogno, bijelo polje će postati crno ako i samo ako broj koraka u kojima mijenjamo boju tog polja daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

Također možemo uočiti da neki kvadrat ne moramo odabirati više od dva puta jer su boje polja koje dobivamo nakon $3q + r$ koraka jednake bojama koje dobivamo nakon r koraka za $r \in \{0, 1, 2\}$ i $q \in \mathbb{N}$.

Promotrimo prva dva retka ploče dimenzija $N \times N$ i pretpostavimo da je prvo polje u prvom retku crne boje. Kvadrat dimenzija 2×2 u prva dva stupca moramo odabrati dva puta. Nakon toga je drugo polje u prvom retku sivo, pa kvadrat u drugom i trećem stupcu moramo odabrati dva puta. Time je postignuto da je drugo polje crno, a treće polje bijelo. Zato zaključujemo da kvadrat u trećem i četvrtom stupcu ne smijemo odabrati. Analogno zaključujemo da kvadrat u četvrtom i petom stupcu moramo odabrati jednom, kvadrat u petom i šestom stupcu jednom, a kvadrat u šestom i sedmom stupcu ne smijemo odabrati. Na isti način je jednoznačno određeno što moramo činiti sa svim 2×2 kvadratima u gornjem lijevom dijelu dimenzija $2 \times 3K$, tj. 2×2 kvadrate redom moramo odabrati

$$2, 2, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, \ldots$$

puta, pri čemu je taj niz brojeva periodičan s periodom 6.

Bez obzira je li $L = 1$ ili $L = 2$, jednoznačno je određeno koliko puta bismo morali odabrati kvadrat dimenzija 2×2 u posljednja dva stupca kako bismo postigli da *pretposljednje* polje u prvom retku promijeni boju iz crne u bijelu ili obratno. No, taj broj se razlikuje od broja potrebnih odabira tog istog kvadrata kako bismo postigli da *posljednje* polje u prvom retku promijeni boju iz crne u bijelu ili obratno. Time je dokaz završen.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak A-2.1.

Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4,$$

odredi najveću moguću vrijednost izraza $x + y + z + w$.

Rješenje.

Nadopunjavanjem do kvadrata zadanu jednakost možemo zapisati u obliku

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(w + \frac{7}{2}\right)^2 = 25.$$

Po nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine vrijedi

$$\frac{(x + \frac{1}{2}) + (y + \frac{3}{2}) + (z + \frac{5}{2}) + (w + \frac{7}{2})}{4} \leqslant \sqrt{\frac{(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z + \frac{5}{2})^2 + (w + \frac{7}{2})^2}{4}}.$$

Zaključujemo da je $(x + \frac{1}{2}) + (y + \frac{3}{2}) + (z + \frac{5}{2}) + (w + \frac{7}{2}) \leqslant 10$, to jest

$$x + y + z + w \leqslant 2.$$

Uočimo da se vrijednost 2 doista postiže, na primjer za $x = 2, y = 1, z = 0, w = -1$.

Prema tome, najveća moguća vrijednost izraza $x + y + z + w$ je 2.

Zadatak A-2.2.

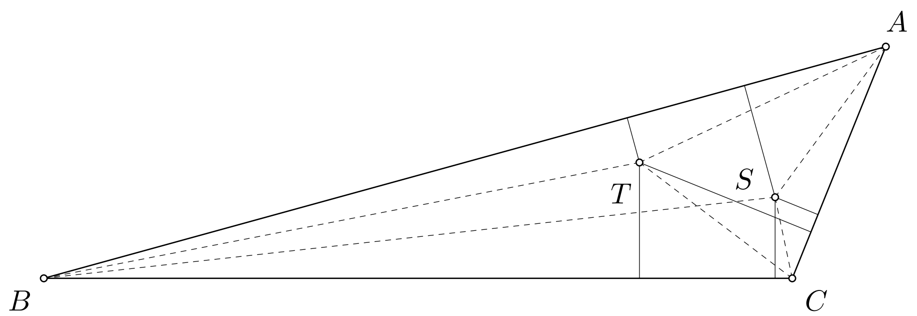
Unutar trokuta ABC nalaze se točke S i T. Udaljenosti točke S od pravaca AB, BC i CA su redom 10, 7 i 4. Udaljenosti točke T od tih pravaca su redom 4, 10 i 16.

Odredi polumjer trokutu ABC upisane kružnice.

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$. Neka je P površina, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ poluopseg, a r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

Podijelimo trokut ABC na tri manja trokuta tako da točku S spojimo s vrhovima A, B i C.



Zbrajanjem površina trokuta ABS, BCS i CAS dobivamo površinu trokuta ABC, pa vrijedi

$$2P = 10c + 7a + 4b.$$

Analogno, promatrajući točku T dobivamo

$$2P = 4c + 10a + 16b.$$

Pomnožimo li prvu jednakost s 2 i zbrojimo s drugom, dobivamo

$$6P = 24(a + b + c) = 48s, \qquad \text{tj.} \quad P = 8s.$$

Budući da je $P = rs$, slijedi $r = 8$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dobivamo

$$2P = 10c + 7a + 4b \quad \text{i} \quad 2P = 4c + 10a + 16b.$$

Iz $10c + 7a + 4b = 4c + 10a + 16b$ izrazimo $a = 2c - 4b$.

Uvrštavanjem u prvu jednakost dobivamo $2P = 24c - 24b$.

S druge strane, imamo $2P = r(a + b + c) = r(3c - 3b)$.

Odavde zaključujemo da je $r(3c - 3b) = 24c - 24b$, tj. $r = 8$.

Zadatak A-2.3.

Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a > b$ i

$$a - b = 5b^2 - 4a^2.$$

Dokaži da je $a - b$ kvadrat prirodnog broja.

Prvo rješenje.

Danu jednakost zapišemo u pogodnijem obliku:

$$(a - b)(1 + 4(a + b)) = b^2.$$

Dovoljno je pokazati da su izrazi u zagradama relativno prosti jer to povlači da su $a - b$ i $1 + 4(a + b)$ kvadrati prirodnih brojeva.

Označimo s d najveći zajednički djelitelj brojeva $a - b$ i $1 + 4(a + b)$. Imamo

$$d = M(a - b, 1 + 4(a + b)) = M(a - b, 1 + 4(a + b) - 4(a - b)) = M(a - b, 1 + 8b).$$

Odavde slijedi da d dijeli $1 + 8b$.

Iz početne jednakosti vidimo da d dijeli i b^2.

Budući da je $M(1 + 8b, b^2) = 1$, zaključujemo $d = 1$, to jest, $a - b$ i $1 + 4(a + b)$ su relativno prosti, što je trebalo pokazati.

Drugo rješenje.

Početnu jednakost možemo zapisati na sljedeća dva načina

$$(a-b)(1+4(a+b))=b^2, \quad (a-b)(1+5(a+b))=a^2.$$

Množenjem ovih dviju jednakosti dobivamo

$$(a-b)^2(1+4(a+b))(1+5(a+b))=a^2b^2,$$

iz čega zaključujemo da je $(1+4(a+b))(1+5(a+b))$ kvadrat prirodnog broja.

Budući da je

$$M(1+5(a+b),1+4(a+b))=M(1+5(a+b),a+b)=M(1,a+b)=1,$$

slijedi da su $1+4(a+b)$ i $1+5(a+b)$ kvadrati prirodnih brojeva.

Sada iz $(a-b)(1+4(a+b))=b^2$ slijedi da je i $a-b$ kvadrat prirodnog broja.

Zadatak A-2.4.

Dan je trokut ABC. Kružnica k izvana dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki K te produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ preko točaka B i C redom u točkama L i M. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q tako da točka P leži između L i Q.

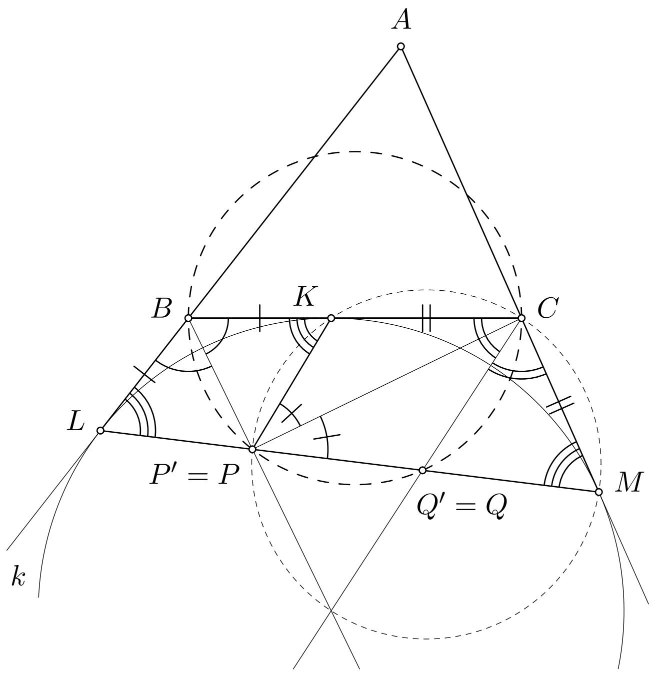
Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu kružnice k.

Rješenje.

Uvedimo oznake $\alpha=\sphericalangle CAB$, $\beta=\sphericalangle ABC$, $\gamma=\sphericalangle BCA$.

Središte kružnice k je sjecište simetrala kutova CBL i BCM. Zbog toga je dovoljno dokazati da te simetrale sijeku pravac LM redom u točkama P i Q.

Označimo s P' i Q', sjecište pravca LM sa simetralama kutova KBL i KCM, redom. Trebamo dokazati $P'=P$ i $Q'=Q$.



Trokuti KBP' i LBP' su sukladni jer imaju zajedničku stranicu $\overline{BP'}$ te vrijedi $|KB| = |LB|$, $\sphericalangle KBP' = \sphericalangle LBP'$. Slijedi da je $\sphericalangle P'KB = \sphericalangle BLP = \sphericalangle ALM$.

Trokut ALM je jednakokračan pa je $\sphericalangle AMP' = \sphericalangle AML = \sphericalangle ALM = \sphericalangle P'KB = 180° - \sphericalangle P'KC$. Odavde slijedi da je četverokut $MCKP'$ tetivan.

Kako je $|MC| = |KC|$, po teoremu o obodnom kutu slijedi $\sphericalangle MP'C = \sphericalangle KP'C$.

Budući da je i $\sphericalangle KP'B = \sphericalangle LP'B$, vrijedi

$$180° = \sphericalangle MP'C + \sphericalangle KP'C + \sphericalangle KP'B + \sphericalangle LP'B = 2(\sphericalangle KP'C + \sphericalangle KP'B) = 2\sphericalangle CP'B,$$

dakle kut $CP'B$ je pravi. Odavde zaključujemo da točka P' leži na kružnici s promjerom $\overline{BC}$.

Na isti način vidimo da točka Q' leži na kružnici s promjerom $\overline{BC}$.

Sada imamo $P', Q' \in \{P, Q\}$, jer se i P' i Q' nalaze na presjeku pravca LM i kružnice s promjerom $\overline{BC}$. Ovo je moguće jedino ako vrijedi $P = P'$ i $Q = Q'$; u suprotnom bi središte kružnice k bilo s iste strane pravca LM kao i točka A. Time je dokaz završen.

Zadatak A-2.5.

U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove.

Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno.

Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.

Prvo rješenje.

Nazovimo jedan raspored boja po ulicama *bojenje*, a jedan odabir trga i promjenu boja svih ulica koje vode do njega nazovimo *transformacija*.

Uočimo da ako od jednog bojenja možemo nizom transformacija doći do nekog drugog bojenja, tada istim nizom transformacija možemo doći i od drugog bojenja do prvog.

Prema tome, početna tvrdnja ekvivalentna je tvrdnji da, krenemo li od bojenja u kojem su sve ulice iste boje, postoji bojenje do kojeg ne možemo doći niti jednim nizom transformacija.

U svakom nizu transformacija, možemo smatrati da se svaki trg pojavljuje nijednom ili jednom. Naime, paran broj transformacija na jednom trgu ima isti rezultat kao da na tom trgu nije niti jednom izvršena transformacija, a svaki neparan broj transformacija na istom trgu ima isti rezultat kao da je transformacija izvršena točno jednom.

Uočimo nadalje da u nizu transformacija kojima iz jednog bojenja dolazimo do drugog redoslijed transformacija nije bitan, odnosno da je važno samo odrediti skup trgova koji su uključeni u te transformacije. Broj različitih skupova trgova iznosi 2^N jer za svaki od N trgova možemo odabrati je li uključen u taj skup ili nije.

Primijetimo da skup u kojem smo uključili sve trgove vodi do bojenja koje je jednako početnom jer smo time svakoj ulici promijenili boju točno dvaput. Isti rezultat očito daje i skup trgova u kojem nismo uključili niti jedan trg. Budući da dva skupa daju isto bojenje, broj različitih bojenja do kojih možemo doći iz nekog početnog bojenja nije veći od $2^N - 1$.

Imamo dva moguća početna bojenja (svi bridovi su crveni, odn. svi bridovi su plavi), pa ukupan broj bojenja do kojih možemo doći iz jednog od ta dva bojenja nije veći od $2\cdot(2^N-1) = 2^{N+1}-2$.

Budući da ima M ulica, a za svaku ulicu imamo dvije moguće boje (crvenu i plavu), ukupan broj mogućih bojenja je 2^M.

Zbog $M > N$ slijedi $2^M \geqslant 2^{N+1} > 2^{N+1} - 2$, pa zaključujemo da postoji bojenje do kojeg nije moguće doći iz početnih jednobojnih bojenja. Time je dokaz završen.

Napomena: U rješenju smo koristili da broj različitih bojenja do kojih možemo doći iz nekog početnog bojenja nije veći od $2^N - 1$, no vrijedi jača ograda - taj broj nije veći od 2^{N-1}. Naime, za bilo koji skup transformacija, postoji komplementaran skup transformacija (u jednom skupu su točno one transformacije koje nisu u drugom i obratno). Dakle, svih 2^N skupova transformacija možemo podijeli u komplementarne parove koji rezultiraju istim bojenjem, iz čega slijedi jača ograda za broj mogućih bojenja.

Drugo rješenje.

Rješenje zapisujemo koristeći jezik teorije grafova. Grad reprezentiramo grafom u kojem vrhovi predstavljaju trgove, te su dva vrha povezana bridom ako i samo ako postoji ulica koja spaja pripadna dva trga.

Uočimo da je dovoljno pokazati da postoji neki podskup skupa svih bridova u kojem je bridove moguće obojiti tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da svi bridovi budu iste boje.

Ciklus duljine n je niz različitih vrhova i bridova

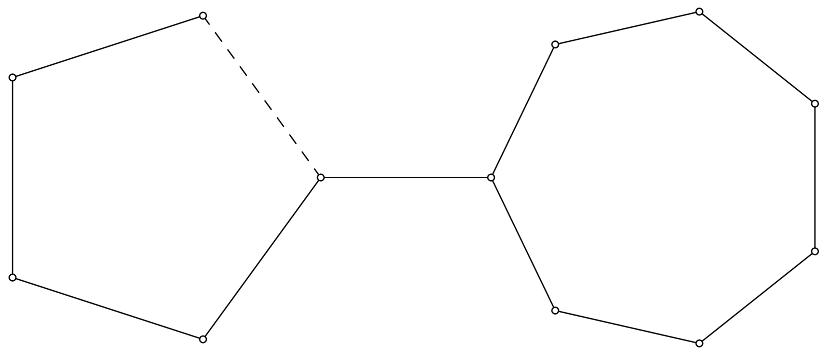
$$T_0, u_1, T_1, \ldots, u_n, T_n = T_0$$

takvih da za svaki $j = 0, \ldots, n-1$ vrhove T_j i T_{j+1} povezuje brid u_j.

Tvrdimo da se u ciklusu parnost broja crvenih (odnosno plavih) bridova ne mijenja. Zaista ako primijenimo dozvoljenu transformaciju na vrh T_j, unutar ciklusa će boju promijeniti dvije ulice u_j i u_{j+1}. Ako su obje ulice bile iste boje onda se broj crvenih bridova promijenio za dva, a ako su te ulice različitih boja onda se broj crvenih bridova ne mijenja.

Ako u grafu postoji ciklus parne duljine, onda jedan brid možemo obojiti plavo, a sve ostale crveno. Tako obojeni bridovi nikad neće imati istu boju jer ćemo uvijek imati neparan broj plavih bridova u tom ciklusu.

Pretpostavimo zato da u grafu nema ciklusa parne duljine. Poznato je (i može se jednostavno dokazati matematičkom indukcijom) da graf koji nema ciklus ima broj bridova manji od broja vrhova. Također, broj bridova u grafu koji ima točno jedan ciklus može najviše biti jednak broju vrhova (jer uklanjanjem jednog brida u ciklusu dobivamo graf bez ciklusa). Budući da je $M + 1 \geqslant N$, slijedi da graf mora imati barem dva ciklusa.



Odaberimo bilo koja dva ciklusa u promatranom grafu. Prema pretpostavci oba imaju neparnu duljinu, te nemaju zajedničkih bridova (u suprotnom bi njihova unija bez zajedničkog brida bila ciklus parne duljine). Obojimo točno jedan brid u jednom ciklusu plavo, a sve druge bridove u oba ciklusa crveno. Zbog parnosti broja crvenih bridova vidimo da ciklus koji ima jedan plavi brid nikad neće imati sve bridove crvene, dok ciklus koji ima sve bridove crvene nikad neće imati sve bridove plave. Dakle, uz opisano bojenje, nikad u budućnosti se ne može dogoditi da svi bridovi (u ta dva ciklusa, pa tako i u čitavom grafu) budu iste boje.

Napomena: U zadatku nije važno dozvoljavamo li da dva trga budu spojena s više od jedne ulice. Naime, ako je postoji takav par trgova, onda građani mogu jednu od ulica koje ih spajaju obojati crveno, a drugo plavo. Dakle, u tom slučaju je tvrdnja trivijalna i preostaje pokazati tvrdnju zadatka pod pretpostavkom da je između svaka dva trga najviše jedna ulica.

Također nije važno da između svaka dva trga postoji niz ulica kojima možemo proći kako bismo došli od jednog trga do drugog. Naime, ako u gradu postoji više nepovezanih dijelova, onda za jedan od tih dijelova mora vrijediti da je broj ulica veći od broja trgova i dalje možemo argumentirati na isti način kao da je taj dio čitavi grad.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak A-3.1.

Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$$

za neke realne brojeve x, y i z.

Prvo rješenje.

Budući da je $|\sin z| \leqslant 1$ i $|\cos z| \leqslant 1$, iz nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned}\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z &\leqslant |\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z| \\ &\leqslant |\sin x||\sin y||\sin z| + |\cos x||\cos y||\cos z| \\ &\leqslant |\sin x||\sin y| + |\cos x||\cos y|. \qquad (1)\end{aligned}$$

Postoje realni brojevi x' i y' takvi da je

$$\sin x' = |\sin x|, \quad \cos x' = |\cos x|, \quad \sin y' = |\sin y| \quad \text{i} \quad \cos y' = |\cos y|. \qquad (2)$$

Stoga iz (1) i (2) slijedi

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant \sin x' \sin y' + \cos x' \cos y' = \cos(x' - y') \leqslant 1.$$

U gornjoj nejednakosti jednakost se postiže za $x = y = z = 0$, pa je najveća moguća vrijednost izraza $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$ jednaka 1.

Napomena: Zbog periodičnosti funkcija sinus i kosinus, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $x, y, z \in [0, 2\pi)$. Sada umjesto korištenja relacije (2), uočimo da možemo pretpostaviti i da su $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Na primjer:

- $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ možemo zamijeniti s $x' = \pi - x$;
- $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$ možemo zamijeniti s $x' = \pi + x$;
- $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ možemo zamijeniti s $x' = 2\pi - x$.

Vrijedi

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x, \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x, & \cos(2\pi - x) &= \cos x,\end{aligned}$$

pa je $|\sin x'| = |\sin x|$ i $|\cos x'| = |\cos x|$, a $x' \in [0, \frac{\pi}{2}]$. U tom slučaju možemo u nejednakosti (1) maknuti apsolutne vrijednosti, pa nastavljamo dalje kao u gore navedenom rješenju.

Drugo rješenje.

Primjenom Cauchy–Schwarzove nejednakosti dobivamo da vrijedi

$$(\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z)^2 \leqslant \left((\sin x \sin y)^2 + (\cos x \cos y)^2\right)(\sin^2 z + \cos^2 z). \tag{3}$$

Budući da je $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ i

$$\begin{aligned} \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y &\leqslant \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 y + \cos^2 y), \end{aligned}$$

iz (3) slijedi

$$|\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z| \leqslant \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1. \tag{4}$$

Jednakost u (3) i (4) se može postići, npr. za $x = y = z = 0$. Stoga je najveća moguća vrijednost izraza $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z$ jednaka 1.

Zadatak A-3.2.

Neka su a i b prirodni brojevi različite parnosti. Dokaži da broj $(a+3b)(5a+7b)$ nije kvadrat prirodnog broja.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da je zadani izraz potpun kvadrat.

Označimo s d najveći zajednički djelitelj brojeva a i b. Tada možemo zapisati $a = da_0, b = db_0$, pri čemu su a_0 i b_0 relativno prosti brojevi. Broj

$$(a+3b)(5a+7b) = d^2(a_0+3b_0)(5a_0+7b_0)$$

je kvadrat prirodog broja ako i samo ako je broj

$$(a_0+3b_0)(5a_0+7b_0)$$

kvadrat prirodnog broja. Kako su a i b različite parnosti, d je neparan, pa su i a_0 i b_0 različite parnosti. Time smo pokazali da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su a i b relativno prosti.

Pokažimo da su brojevi $a+3b$ i $5a+7b$ relativno prosti. Ti brojevi su neparni (jer su a i b različite parnosti), pa pretpostavimo da neki neparan prost p dijeli $a+3b$ i $5a+7b$.

Tada p dijeli i broj

$$5a+7b-5(a+3b) = 7b-15b = -8b.$$

Budući da je neparan, slijedi da p dijeli b. No tada p dijeli i $a+3b-3b = a$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su a i b relativno prosti.

Zaključujemo da brojevi $a+3b$ i $5a+7b$ moraju biti potpuni kvadrati, i to neparnih brojeva.

Razlika kvadrata neparnih brojeva je uvijek djeljiva s 8 jer kvadrati neparnih brojeva daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 8. Međutim, razlika brojeva $5a+7b$ i $a+3b$ je $4(a+b)$, pa nije djeljiva s 8 jer su a i b različite parnosti.

Budući da smo došli do kontradikcije, početna pretpostavka je kriva. Dakle, $(a+3b)(5a+7b)$ nije kvadrat prirodnog broja.

Drugo rješenje.

Promotrimo li zadani izraz modulo 8, dobivamo

$$(a+3b)(5a+7b) \equiv 5a^2+22ab+21b^2 \equiv 5a^2-10ab+5b^2 = 5(a-b)^2 \pmod{8}.$$

Pretpostavimo suprotno od tvrdnje zadatka, odnosno da je $(a+3b)(5a+7b)=k^2$ za neki prirodni broj k. Tada je

$$k^2 \equiv 5(a-b)^2 \pmod{8}.$$

Kako su a i b različite parnosti, $a-b$ je neparan, pa $(a-b)^2$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8.

Stoga je $k^2 \equiv 5 \pmod{8}$. Međutim, 5 nije kvadratni ostatak modulo 8.

Budući da smo došli do kontradikcije, početna pretpostavka je kriva. Dakle, $(a+3b)(5a+7b)$ nije kvadrat prirodnog broja.

Zadatak A-3.3.

Odredi sve polinome P s realnim koeficijentima takve da za sve realne brojeve x vrijedi

$$P(x^2)+2P(x)=(P(x))^2+2.$$

Prvo rješenje.

Dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi $P(x^2)-1=P^2(x)-2P(x)+1$, tj.

$$P(x^2)-1=(P(x)-1)^2.$$

Ako definiramo polinom $Q(x) \coloneqq P(x)-1$, gornja jednadžba postaje

$$Q(x^2)=Q^2(x). \tag{5}$$

Ako je $Q(x)$ konstantni polinom, iz (5) slijedi da mora biti jednak 0 ili 1. S druge strane, ako je stupanj od Q pozitivan, tj. jednak prirodnom broju n, $Q(x)$ možemo zapisati kao

$$Q(x)=a_n x^n+R(x),$$

gdje je R polinom stupnja $r<n$. Uvrštavanjem u (5) dobivamo

$$a_n x^{2n}+R(x^2)=a_n^2 x^{2n}+2a_n x^n R(x)+R^2(x).$$

Slijedi da je $a_n=1$ i

$$R(x^2)=2a_n x^n R(x)+R^2(x).$$

Uočimo da lijeva strana gornje jednakosti ima stupanj $2r$, a desna $n+r$. Budući da je $r<n$, slijedi da je $r=0$. Dakle, $Q(x)=x^n$.

Rješenja početne jednadžbe su $P(x)=1$, $P(x)=2$ i $P(x)=x^n+1$ za bilo koji $n\in\mathbb{N}$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju definiramo polinom $Q(x) = P(x) - 1$, pa početna jednadžba prelazi u

$$Q(x^2) = Q^2(x).$$

Ako je $Q(x)$ konstantni polinom, opet slijedi da mora biti 0 ili 1. Ako $Q(x)$ nije konstantni polinom, pretpostavimo da ima k različitih kompleksnih nultočaka koje su različite od nule.

U tom slučaju polinom $Q(x^2)$ ima $2k$ različitih kompleksnih nultočaka koje su različite od nule. Naime, ako je $\alpha \neq 0$ nultočka od Q, onda su $\sqrt{\alpha}$ i $-\sqrt{\alpha}$ nultočke od $Q(x^2)$.

S druge strane, $Q(x)^2$ ima k nultočaka različitih od nule, pa slijedi da je $k = 0$. Dakle, jedina moguća nultočka od $Q(x)$ je 0, što znači da $Q(x)$ mora biti oblika

$$Q(x) = x^n,$$

gdje je n neki prirodan broj.

Konačno, dobivamo da su rješenja dane jednadžbe $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ i $P(x) = x^n + 1$ za bilo koji prirodan broj n.

Treće rješenje.

Uvrštavanjem $x = 0$ u početnu jednadžbu dobivamo $3P(0) = P(0)^2 + 2$, tj.

$$(P(0) - 1)(P(0) - 2) = 0,$$

pa mora biti $P(0) = 1$ ili $P(0) = 2$.

Ako je $P(x) = a_n x^n$, gdje je n neki prirodan broj, onda uvrštavanjem u početnu jednadžbu slijedi

$$a_n x^{2n} + 2a_n x^n = a_n^2 x^{2n} + 2,$$

pa mora biti $n = 0$ i $3a_0 = a_0^2 + 2$. Dakle, rješenja su konstantni polinomi: $P(x) = 1$ i $P(x) = 2$.

S druge strane, ako je $P(x) = a_n x^n + a_k x^k + R(x)$, gdje su $n > k \geqslant 0$, $a_n, a_k \neq 0$ i $R(x)$ polinom stupnja manjeg od k, onda uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} a_n x^{2n} &+ a_k x^{2k} + R(x^2) + 2a_n x^n + 2a_k x^k + 2R(x) \\ &= a_n^2 x^{2n} + 2a_n a_k x^{n+k} + a_k^2 x^{2k} + R(x)(2a_n x^n + 2a_k x^k + R(x)) + 2. \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti, zbog $2n > n + k > 2k$ i $n + k > n$, zaključujemo da je $k = 0$ i $a_n = a_n^2$. Zbog $a_n \neq 0$ je $a_n = 1$, pa slijedi da je $P(x) = x^n + a_0$.

Stoga mora vrijediti

$$x^{2n} + a_0 + 2x^n + 2a_0 = x^{2n} + 2a_0 x^n + a_0^2 + 2.$$

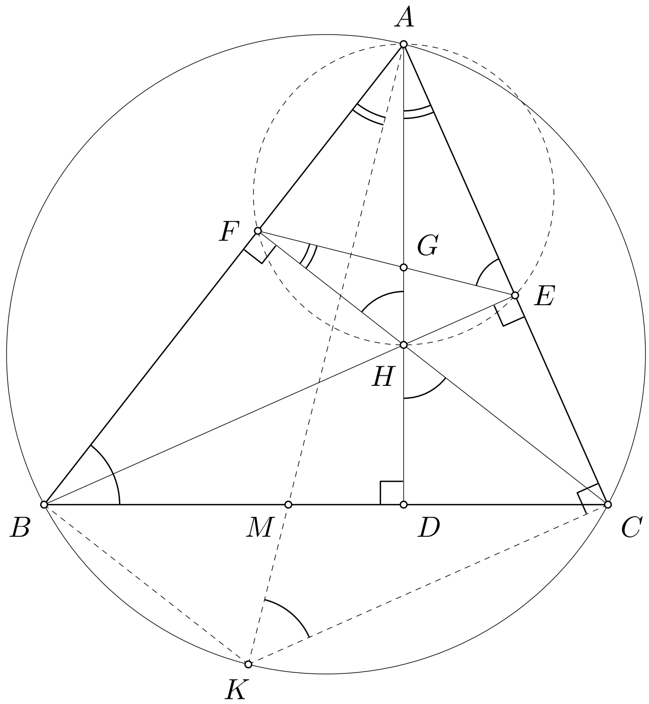
Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije dobivamo da je $2 = 2a_0$ i $3a_0 = a_0^2 + 2$, pa slijedi $a_0 = 1$. Dakle, $P(x) = x^n + 1$ je još jedino preostalo rješenje.

Zadatak A-3.4.

Dan je šiljastokutni trokut ABC s visinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ te ortocentrom H. Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki G. Dužina $\overline{AK}$ je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M. Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.

Rješenje.

Označimo kutove $\beta = \sphericalangle ABC, \gamma = \sphericalangle BCA$.



Budući da je trokut BFC pravokutan, slijedi da je $\sphericalangle BCF = 90° - \beta$. Kako je i trokut CDH pravokutan, slijedi da je $\sphericalangle DHC = \beta$.

Slijedi da je i $\sphericalangle AHF = \beta$ (jer su $\sphericalangle DHC$ i $\sphericalangle AHF$ vršni).

Budući da je $ABKC$ tetivni četverokut, obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC}$ su jednaki $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC = \beta$. Kut $\sphericalangle ACK$ je pravi jer je nad promjerom $\overline{AK}$ (po Talesovom poučku). Sada možemo zaključiti da su trokuti AFH i ACK slični (jer su kutovi $\sphericalangle AFH$ i $\sphericalangle ACK$ pravi, a $\sphericalangle AKC = \sphericalangle AHF = \beta$). Iz ove sličnosti slijedi da je

$$\frac{|AF|}{|AH|} = \frac{|AC|}{|AK|}. \tag{6}$$

Četverokut $AFHE$ je tetivni jer je $\sphericalangle AFH + \sphericalangle HEA = 90° + 90° = 180°$.

Stoga je i $\sphericalangle FEA = \sphericalangle FHA = \beta$, jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AF}$. Dakle, trokut AFE dijeli kut $\sphericalangle BAC = \sphericalangle FAE$ s trokutom ABC, a kako je $\sphericalangle FEA = \beta$, slijedi da su trokuti AEF i ABC slični, te je

$$\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \tag{7}$$

Budući da je $ABKC$ tetivni četverokut, obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB}$ su jednaki $\sphericalangle BKA = \sphericalangle BCA = \gamma$.

U trokutu AFE je $\sphericalangle AFE = \gamma$ (zbog prije dokazane sličnosti s ABC), pa je njemu komplementaran $\sphericalangle HFE = 90^\circ - \gamma$. Uočimo da je $\sphericalangle HAE = \sphericalangle HFE = 90^\circ - \gamma$, jer su to obodni kutovi u tetivnom četverokutu $AFHE$. Slijedi da su trokuti AGE i AMB slični, pa je

$$\frac{|AG|}{|AE|} = \frac{|AM|}{|AB|}. \tag{8}$$

Množenjem jednakosti (6), (7) i (8), zaključujemo da su omjeri $\dfrac{|AG|}{|AH|}$ i $\dfrac{|AM|}{|AK|}$ jednaki.

Konačno, prema obratu Talesovog poučka o proporcionalnosti zaključujemo da su pravci GM i HK paralelni.

Napomena: Nakon što izrazimo kutove kao u ovom rješenju, možemo trigonometrijski pokazati istu jednakost omjera. U pravokutnom trokutu AFH je $\sin\beta = \frac{|AF|}{|AH|}$, a u trokutu AFG iz poučka o sinusima dobivamo $\frac{|AG|}{\sin\gamma} = \frac{|AF|}{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)}$. Slijedi da je $\frac{|AG|}{|AH|} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)}$.

U trokutu AMB je $\sphericalangle AMB = 180^\circ - \beta - (90 - \gamma) = 90^\circ + \gamma - \beta$, pa je po poučku o sinusima $\frac{|AM|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin(90^\circ+\gamma-\beta)}$. U pravokutnom trokutu ABK je $\sin\gamma = \frac{|AB|}{|AK|}$, pa je $\frac{|AM|}{|AK|} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(90^\circ+\gamma-\beta)}$.

Kako je $90^\circ + \gamma - \beta + 90^\circ + \beta - \gamma = 180^\circ$, vidimo da je $\sin(90^\circ + \gamma - \beta) = \sin(90^\circ + \beta - \gamma)$. Slijedi da su omjeri $\frac{|AG|}{|AH|}$ i $\frac{|AM|}{|AK|}$ jednaki.

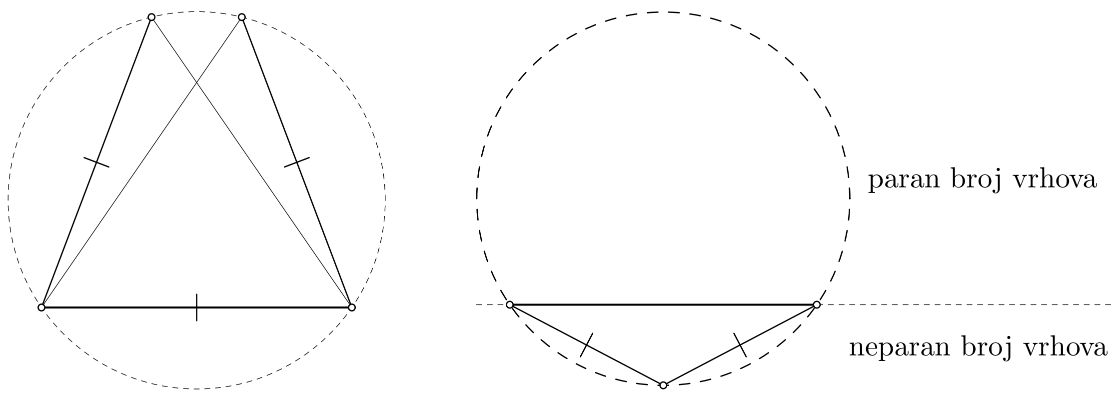
Zadatak A-3.5.

Neka je C prirodni broj manji od 2017. Točno C vrhova pravilnog 2017-erokuta je crveno, a svi ostali vrhovi su plavi. Dokaži da broj jednakokračnih trokuta čija su sva tri vrha iste boje ne ovisi o rasporedu crvenih i plavih vrhova.

Prvo rješenje.

Prvo uočimo da ne postoji jednakostraničan trokut s vrhovima među vrhovima početnog mnogokuta. Naime, kada bi postojao, onda bi između svakog para njegovih vrhova trebao biti jednak broj točaka, što bi značilo da 3 dijeli 2014, a to nije istina.

Dokažimo da svaka dužina (čije su krajnje točke dva vrha početnog mnogokuta) leži na točno 3 različita jednakokračna trokuta.



Promotrimo neku dužinu. Njene krajnje točke dijele kružnicu opisanu mnogokutu na dva luka na kojima se ukupno nalazi 2015 vrhova. Jedan od tih lukova sadrži neparno, a drugi parno mnogo vrhova, pa postoji točno jedan jednakokračni trokut kojem je ta dužina osnovica (treći vrh je u polovištu luka s neparno mnogo vrhova). Na sličan način zaključujemo da je zadana dužina krak u točno dva jednakokračna trokuta - treći vrh možemo odabrati na duljem od ta dva luka na točno dva načina.

Neka je P broj plavih točaka ($P + C = 2017$). Neka su d_p, d_c, d_s, redom, brojevi plavih (obje krajnje točke su obojane plavo), crvenih i šarenih dužina. Nadalje, neka su t_p, t_c, t_{sp}, t_{sc} brojevi jednakokračnih trokuta čije su točke plave, crvene, šarene, ali prevladava plava i šarene uz prevladavanje crvene.

Zbog činjenice da svaka dužina leži na točno 3 jednakokračna trokuta imamo:

$$\begin{aligned}3d_p &= 3t_p + t_{sp},\\ 3d_c &= 3t_c + t_{sc},\\ 3d_s &= 2t_{sp} + 2t_{sp}.\end{aligned}$$

Iz ovog slijedi $3d_p + 3d_c - \frac{3}{2}d_s = 3t_p + 3t_c$, odnosno:

$$t_p + t_c = d_p + d_c - \frac{1}{2}d_s = \frac{1}{2} \cdot (P(P-1) + C(C-1) - PC),$$

što ovisi samo o broju plavih i crvenih točaka, a ne i o njihovom rasporedu.

Drugo rješenje.

Označimo vrhove mnogokuta s $A_1, A_2, \ldots, A_{2017}$ redom. Pridružimo svakom vrhu broj a_i ovisno o boji tog vrha: $a_i = 1$ ako je crveni vrh, $a_i = 0$ ako je plavi vrh.

Trokut $A_iA_jA_k$ je *jednobojan* (tj. ima sva tri vrha iste boje) ako i samo ako je $a_ia_ja_k$ ili $(1-a_i)(1-a_j)(1-a_k)$ jednako 1. Broj jednakokračnih jednobojnih trokuta je onda zbroj Z izraza $a_ia_ja_k + (1-a_i)(1-a_j)(1-a_k)$ po svim trojkama (i,j,k) za $i,j,k \in \{1,2,\ldots,2017\}$ takvim da je $A_iA_jA_k$ jednakokračan

Budući da 2017 nije djeljiv ni s 3, nema jednakostraničnih trokuta $A_iA_jA_k$. Također, 2017 je neparan broj, pa je svaka dužina $\overline{A_iA_j}$ osnovica točno jednog jednakokračnog trokuta, tj. svakom paru (i,j) odgovara točno jedan $k = k(i,j)$ takav da je $A_iA_jA_k$ jednakokračan s osnovicom $\overline{A_iA_j}$.

Zbog toga slijedi

$$\begin{aligned}Z &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} a_ia_ja_{k(i,j)} + (1-a_i)(1-a_j)(1-a_{k(i,j)})\\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} (1 - a_i - a_j - a_{k(i,j)} + a_ia_j + a_ia_{k(i,j)} + a_ja_{k(i,j)})\\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} 1 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} (a_i + a_j + a_{k(i,j)}) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} (a_ia_j + a_ia_{k(i,j)} + a_ja_{k(i,j)})\end{aligned}$$

Zbroj

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} (a_i + a_j + a_{k(i,j)})$$

prikazuje zbroj izraza $a_i + a_j + a_k$ po svim jednakokračnim trokutima $A_iA_jA_k$.

Svaki vrh se pojavljuje u 2016 osnovica jednakokračnih trokuta i 1008 jednakokračnih trokuta kao vrh između krakova, pa vrijedi

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017}(a_i + a_j + a_{k(i,j)}) = (2016+1008)\sum_{i=1}^{2017} a_i.$$

Svaka dužina $\overline{A_iA_j}$ je stranica u točno tri jednakokračna trokuta, pa vrijedi

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017}(a_ia_j + a_ia_{k(i,j)} + a_ja_{k(i,j)}) = 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} a_ia_j.$$

Zaključujemo

$$Z = \frac{2017\cdot 2016}{2} - (2016+1008)\sum_{i=1}^{2017} a_i + 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2017} a_ia_j.$$

Primijetimo da je $C = \sum_{i=1}^{2017} a_i = \sum_{i=1}^{2017} a_i^2$, broj crvenih vrhova. Sada vidimo da je

$$\begin{aligned}Z &= \frac{2017\cdot 2016}{2} - 3024C + 3\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{2017} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{2017} a_i^2\right)\\ &= \frac{2017\cdot 2016}{2} - 3024C + \frac{3}{2}(C^2 - C),\end{aligned}$$

što očito ovisi samo o broju crvenih vrhova, ali ne i o njihovom rasporedu.

Treće rješenje.

Neka je P broj plavih vrhova, t_c broj jednakokračnih trokuta čiji su svi vrhovi crveni, a t_p broj jednakokračnih trokuta čiji su vrhovi plavi. Nadalje, neka je t_{ccp} broj jednakokračnih trokuta čiji su vrhovi osnovice crveni, a vrh nasuprot osnovice plav. Analogno, neka je t_{ppc} broj jednakokračnih trokuta čiji je vrh nasuprot osnovice crven, a preostali vrhovi plavi.

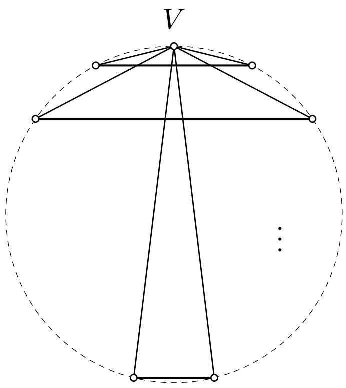
Kao u prvom rješenju zaključujemo da je svaki par točaka osnovica točno jednog jednakokračnog trokuta. Brojeći po parovima plavih točaka, slijedi da je

$$t_p + t_{ppc} = \frac{P(P-1)}{2}. \tag{9}$$

Neka je V neki crveni vrh. Točka V je vrh nasuprot osnovice u točno 1008 jednakokračnih trokuta jer preostalih 2016 točaka možemo podijeliti u 1008 paralelnih tetiva, koje su moguće osnovice (vidi sliku).

Neka je $c(V)$ broj crvenih jednakokračnih trokuta kojima je V vrh nasuprot osnovice, te neka je $p(V)$ broj onih čija su oba preostala vrha plave boje. Ako je $c(V) = 0$, tj. među preostalih $C-1$ crvenih vrhova nijedan par nije na istoj od paralelnih tetiva, onda je $p(V) = 1008 - (C-1)$. Ako su pak na nekim od tih tetiva oba vrha crvena, tada je i više osnovica s oba plava vrha – preciznije, za svaku paralelnu tetivu s oba crvena vrha imamo jednu paralelnu tetivu s oba plava vrha, tj.

$$p(V) = 1009 - C + c(V).$$



Zbrojimo li jednakosti po svim crvenim vrhovima, dobivamo

$$t_{ppc} = \sum_{V \text{ je crven}} p(V) = C(1009 - C) + \sum_{V \text{ je crven}} c(V).$$

Primijetimo da je zbroj s desne strane zapravo broj crvenih jednobojnih trokuta. Dakle,

$$t_{ppc} = C(1009 - C) + t_c.$$

Iz (9) slijedi da je

$$\frac{P(P-1)}{2} - t_p = C(1009 - C) + t_c.$$

Konačno, ukupan broj jednobojnih trokuta

$$t_p + t_c = \frac{P(P-1)}{2} - C(1009 - C)$$

ne ovisi o rasporedu crvenih i plavih vrhova, nego samo o njihovom broju.

Četvrto rješenje.

Dokazat ćemo da zamjenom boje dvama uzastopnim vrhovima broj jednobojnih jednakokračnih trokuta ostaje isti. Budući da s konačno mnogo takvih zamjena možemo doći iz jednog u bilo koji drugi raspored s istim brojem crvenih vrhova, time će tvrdnja zadatka biti dokazana.

Označimo dva uzastopna vrha s X i Y. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je X plavi, a Y crveni vrh. Jednakokračni trokuti koji ne uključuju ta dva vrha će nakon zamjene ostati istih boja vrhova. S druge strane, kako su X i Y različite boje, nijedan trokut koji ima vrhove X i Y neće imati sva tri vrha iste boje. Stoga promatramo samo jednakokračne trokute koji imaju točno jedan vrh među točkama X i Y. Zbog jednostavnosti, reći ćemo da je trokut kojem su vrhovi među vrhovima zadanog mnogokuta *dobar* ako je jednakokračan i sadrži točno jedan vrh iz skupa $\{X, Y\}$.

Neka je $c(X)$ broj dobrih trokuta kojima je X jedan od vrhova, a preostala dva vrha su crvena. Slično, $p(X)$ je broj dobrih trokuta kojima je X jedan od vrhova, a preostala dva vrha su plava. Analogno definiramo brojeve $c(Y)$ i $p(Y)$. Broj jednobojnih dobrih trokuta je $p(X) + c(Y)$.

Ako vrhu X boju promijenimo iz plave u crvenu, a vrhu Y iz crvene u plavu, broj jednobojnih dobrih trokuta je $c(X) + p(Y)$. Želimo dokazati da je

$$c(X) + p(Y) = p(X) + c(Y).$$

Neka je D ukupan broj dobrih trokuta kojima je X vrh (može se pokazati, ali to nećemo koristiti, da je $I = 3021$). Uočimo da je zbog simetrije broj dobrih trokuta kojima je Y vrh također jednak D.

Broj dobrih trokuta kojima je X jedan od vrhova, pri čemu su preostala dva vrha međusobno različite boje jednak je $D - c(X) - p(X)$.

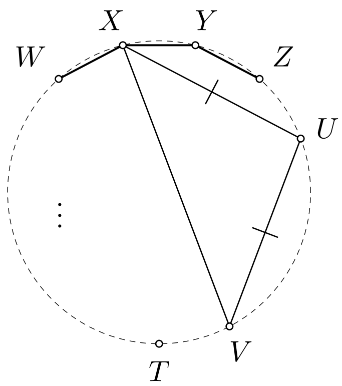
Na dva načina ćemo prebrojati skup

$$\mathcal{X} = \{(U, V) : U \text{ je crveni vrh dobrog trokuta } UVX\}.$$

Broj parova (U, V) pri čemu su i U i V crveni je $2c(X)$, dok je $D - c(X) - p(X)$ broj parova (U, V) pri čemu je U crveni, a V plavi vrh. Zato je

$$|\mathcal{X}| = 2c(X) + D - c(X) - p(X) = D + c(X) - p(X).$$

Neka je vrh T jednako udaljen od X i Y, te neka su W i Z takvi da su W, X, Y, Z redom uzastopni vrhovi.



Crveni vrh U možemo odabrati na $C-1$ načina, no broj dobrih trokuta koji sadrže dužinu $\overline{UX}$ ovisi o tome je li točka U u skupu $\{W, Z, T\}$. Neka je d broj crvenih vrhova u skupu $\{W, Z, T\}$. Ako je U u skupu $\{W, Z, T\}$, onda vrh V možemo odabrati na dva načina. Ako pak U nije u skupu $\{W, Z, T\}$, onda V možemo odabrati na tri načina. Slijedi da je

$$2d + 3(C - 1 - d) = |\mathcal{X}| = D + c(X) - p(X).$$

Analogno, dvostrukim prebrojavanjem skupa

$$\mathcal{Y} = \{(U, V) : U \text{ je crveni vrh dobrog trokuta } UVY\}$$

dobivamo

$$2d + 3(C - 1 - d) = |\mathcal{Y}| = 2c(Y) + D - c(Y) - p(Y) = D + c(Y) - p(Y).$$

Sada slijedi $D + c(X) - p(X) = D + c(Y) - p(Y)$, tj. $c(X) + p(Y) = p(X) + C(Y)$. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak A-4.1.

Neka su c i d pozitivni djelitelji prirodnog broja n. Ako je $c > d$, dokaži da je $c > d + \dfrac{d^2}{n}$.

Prvo rješenje.

Promotrimo brojeve $\dfrac{n}{d}$ i $\dfrac{n}{c}$. To su također pozitivni djelitelji broja n za koje vrijedi $\dfrac{n}{d} > \dfrac{n}{c}$.
Sada je

$$\frac{n}{d} - \frac{n}{c} \geqslant 1$$

iz čega slijedi

$$c - d \geqslant \frac{dc}{n} > \frac{d^2}{n}.$$

Drugo rješenje.

Neka je $c = ma$ i $d = mb$, gdje su m, a i b prirodni brojevi takvi da su a i b relativno prosti. Kako $c \mid n$, vidimo da $m \mid n$ pa neka je k takav da vrijedi $n = mk$. Trebamo dokazati da je

$$ma > mb + \frac{m^2b^2}{mk}, \qquad \text{tj.} \quad a > b + \frac{b^2}{k}.$$

Budući da su c i d djelitelji broja n, brojevi a i b dijele k, a zbog $c > d$ vrijedi da je $a > b$. Brojevi a i b su relativno prosti pa zaključujemo da ab dijeli k. Zato je $k \geqslant ab > b^2$ i vrijedi

$$a \geqslant b + 1 = b + \frac{k}{k} > b + \frac{b^2}{k}.$$

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

Prvo rješenje.

Uvrštavanjem $x = -f(y)$ dobivamo: $f(0) = f(f(y)) - (f(y))^2$. Ovdje stavimo $y = 0$ i označimo $a = f(0)$ pa dobijemo $f(a) = a^2 + a$. Vratimo se na danu jednakost i uvrstimo $y = 0$:

$$f(x + a) = f(a) + 2xa + x^2 = x^2 + 2xa + a^2 + a = (x + a)^2 + a.$$

Zaključujemo da su jedini kandidati za rješenja funkcije oblika $f(x) = x^2 + a$, gdje je a proizvoljna realna konstanta. Provjerom vidimo da to uistinu i jesu sva rješenja zadatka.

Drugo rješenje.

Uvrštavanjem $x = -f(y)$ dobivamo: $f(0) = f(f(y)) - (f(y))^2$. Neka je $x = z - f(y)$ pa iz dane jednakosti dobijemo

$$f(z) = f(f(y)) + z^2 - (f(y))^2 = z^2 + f(0).$$

Dakle, svi kandidati za rješenja su funkcije oblika $f(x) = x^2 + a$, gdje je a proizvoljna realna konstanta. Provjerom vidimo da to uistinu i jesu sva rješenja zadatka.

Treće rješenje.

Neka je $a = f(0)$, uvrstimo li u danu jednakost $y = 0$ dobivamo

$$f(x + a) = f(a) + 2ax + x^2.$$

Stavimo li ovdje $x - a$ umjesto x zaključujemo da je f nužno oblika $f(x) = x^2 + bx + c$, za neke realne konstante b i c.

Uvrstimo li to u početnu jednakost, dobijemo da za sve realne x i y vrijedi:

$$(x + f(y))^2 + b(x + f(y)) + c = (f(y))^2 + bf(y) + c + 2xf(y) + x^2,$$

tj. $bx = 0$. Dakle, mora biti $b = 0$, dok za c nema nikakvih dodatnih uvjeta. Stoga su rješenja sve funkcije oblika $f(x) = x^2 + c$, gdje je c proizvoljna realna konstanta.

Zadatak A-4.3.

Za točku P unutar trokuta ABC kažemo da je *sjajna* ako se iz nje može povući točno 27 polupravaca koji sijeku stranice trokuta ABC tako da je njima trokut podijeljen na 27 manjih trokuta jednakih površina. Odredi broj svih sjajnih točaka trokuta ABC.

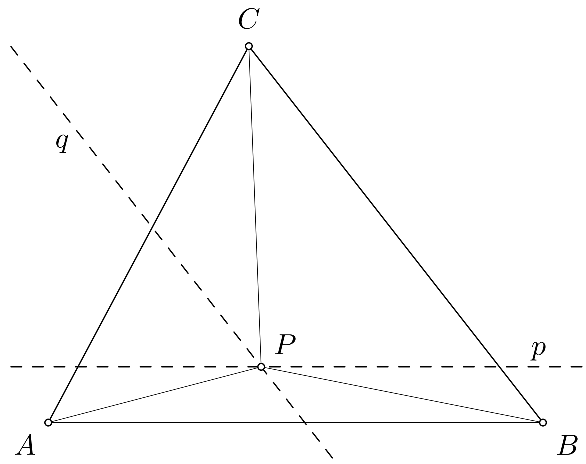
Rješenje.

Neka je P sjajna točka trokuta ABC i neka je, bez smanjenja općenitosti, površina trokuta ABC jednaka 27. Najprije primijetimo da među 27 povučenih polupravaca uvijek moraju biti polupravci PA, PB i PC; u suprotnom neće sva područja na koja je trokut ABC podijeljen biti trokuti.

Svaki od 27 manjih trokuta se nalazi u (ili je jednak) nekom od trokuta PAB, PBC, PCA. Neka ih se u trokutu PAB nalazi m, a u trokutu PBC njih n. Brojevi m i n se nalaze u skupu $\{1, 2, \dots, 25\}$ i za njih vrijedi $m + n \leqslant 26$, u trokutu PCA se nalazi $27 - m - n$ manjih trokuta.

Promotrimo m trokuta koji se nalaze unutar trokuta PAB, svi oni imaju površinu jednaku 1 i zajedničku visinu koja je jednaka udaljenosti točke P od $\overline{AB}$, neka je to d_{AB}. Tih m trokuta imaju sukladne stranice na koje je uočena visina okomita pa vidimo da su sve te sukladne stranice duljine $\frac{1}{m}|AB|$, zaključujemo da je duljina d_{AB} jedinstveno određena brojem m. Preciznije, $d_{AB} = \frac{2m}{|AB|}$. Označimo li udaljenost točke P od $\overline{BC}$ s d_{BC} na isti način vidimo da je duljina d_{BC} jedinstveno određena brojem n.

Primijetimo da je d_{AB} manje od udaljenosti točke C od $\overline{AB}$, u suprotnom je površina trokuta PAB barem jednaka površini trokuta ABC, što je nemoguće. Na isti način zaključimo da je d_{BC} manje od udaljenosti točke A od $\overline{BC}$. Neka je p pravac paralelan s AB koji se nalazi između AB i točke C te je udaljen od AB za d_{AB}. Analogno, neka je pravac q između BC i A udaljen od BC za d_{BC}. Točka P se nalazi na presjeku pravaca p i q i ona je time jedinstveno određena. Za ovakvu točku P površina trokuta PAB jednaka je m, trokuta PBC jednaka je n, a površina trokuta PCA jednaka je onda $27 - m - n$.



Pitanje zadatka je sada ekvivalentno pitanju na koliko načina možemo izabrati brojeve m i n. Za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, 25\}$, n možemo odabrati na točno $26 - m$ načina. Stoga je rješenje

$$\sum_{m=1}^{25} (26 - m) = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325.$$

Zadatak A-4.4.

Dan je šiljastokutni trokut ABC u kojem vrijedi $|AB| > |AC|$. Neka je O središte kružnice opisane tom trokutu, a $\overline{OQ}$ promjer kružnice opisane trokutu BOC. Pravac paralelan s pravcem BC kroz A siječe pravac CQ u točki M, a pravac paralelan s pravcem CQ kroz A siječe pravac BC u točki N. Neka je T presjek pravaca AQ i MN.

Dokaži da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC.

Prvo rješenje.

Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\gamma = \sphericalangle BCA$.

Neka pravac AQ siječe kružnicu opisanu trokutu BOC u točkama Q i T'.

Uočimo da je $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ jer je to središnji kut nad tetivom $\overline{BC}$, te je $\sphericalangle BQC = 180^\circ - 2\alpha$ i $\sphericalangle QCB = \sphericalangle QBC = \alpha$.

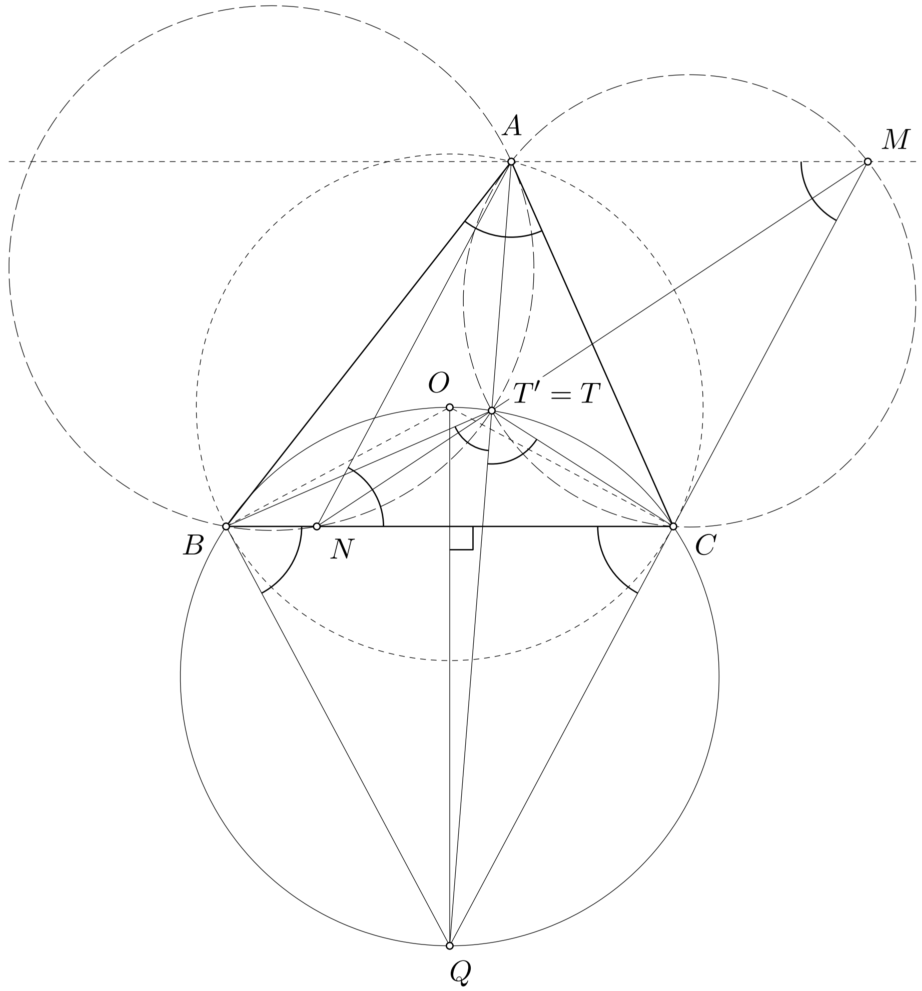
Budući da su pravci AM i BC paralelni, slijedi $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACB = \gamma$ i $\sphericalangle AMC = \sphericalangle QCB = \alpha$.

Također, točka T' leži na kružnici opisanoj trokutu BQC, pa je $\sphericalangle QT'C = \sphericalangle QBC = \alpha$, tj. $\sphericalangle AT'C = 180^\circ - \alpha$. Iz toga slijedi da je $AT'CM$ tetivni četverokut.

Analogno zaključujemo

$$\sphericalangle BT'Q = \sphericalangle BCQ = \alpha \quad \text{i} \quad \sphericalangle ANC = \sphericalangle AMC = \alpha.$$

Iz toga slijedi $\sphericalangle BNA = 180^\circ - \alpha = \sphericalangle BT'A$, tj. $ABNT'$ je također tetivni četverokut.



Iz tetivnosti četverokuta $AT'CM$ zaključujemo da je $\sphericalangle AT'M = \sphericalangle ACM = \beta$, a iz tetivnosti četverokuta $ABNT'$ zaključujemo da je $\sphericalangle AT'N = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 180^\circ - \beta$. Dakle,

$$\sphericalangle AT'N + \sphericalangle AT'M = 180^\circ,$$

tj. točke M, N i T' su kolinearne.

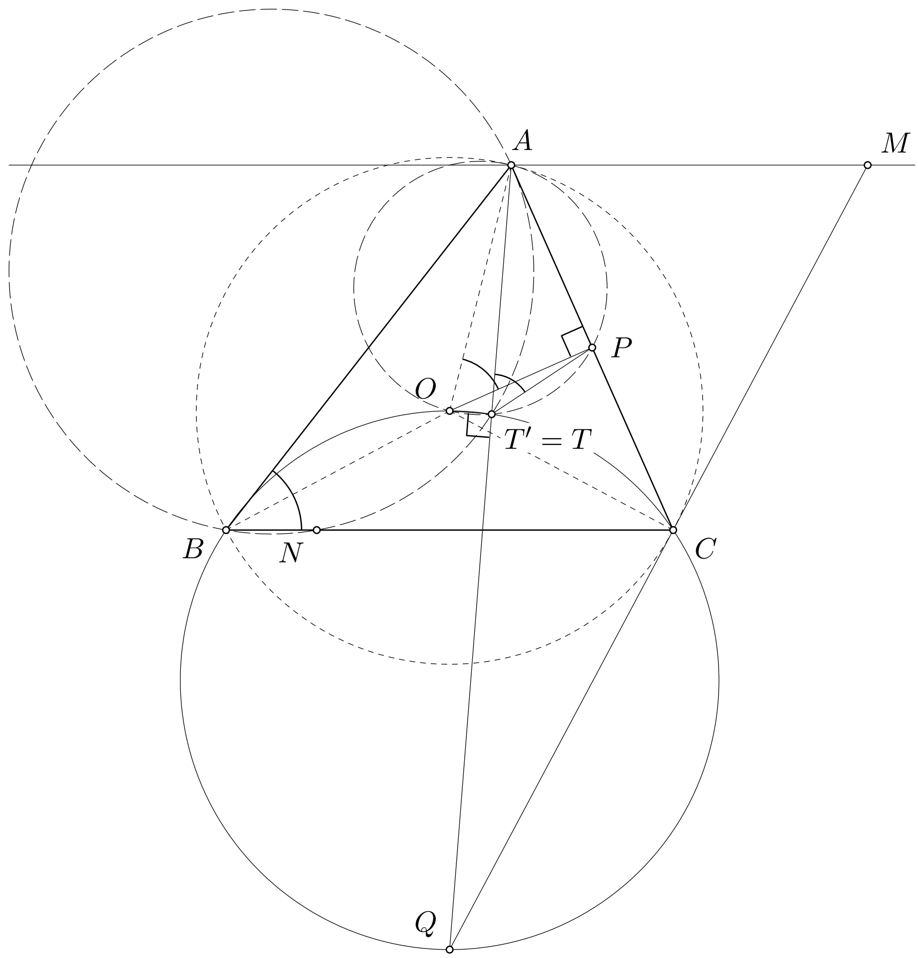
Dakle, točka T' je presjek pravaca BQ i MN, pa zaključujemo da se točke T' i T podudaraju. Budući da smo T' definirali kao točku koja leži na kružnici opisanoj trokutu BOC, slijedi tvrdnja zadatka.

Drugo rješenje.

Neka pravac AQ siječe kružnicu opisanu trokutu BOC u točkama Q i T'. Uočimo da je $\overline{OQ}$ promjer te kružnice, pa je $\sphericalangle OT'Q = 90°$.

Neka je točka P polovište stranice $\overline{AC}$. Budući da je točka O središte opisane kružnice trokutu ABC slijedi da je $\sphericalangle OPA = 90°$.

Dakle, vrijedi $\sphericalangle OT'A = 180° - \sphericalangle OT'Q = 90° = \sphericalangle OPA$, pa je $AOT'P$ tetivni četverokut.



Uočimo da točka P leži na pravcu MN (tj. P je i polovište dužine $\overline{MN}$) jer je $ANCM$ paralelogram. Zato je

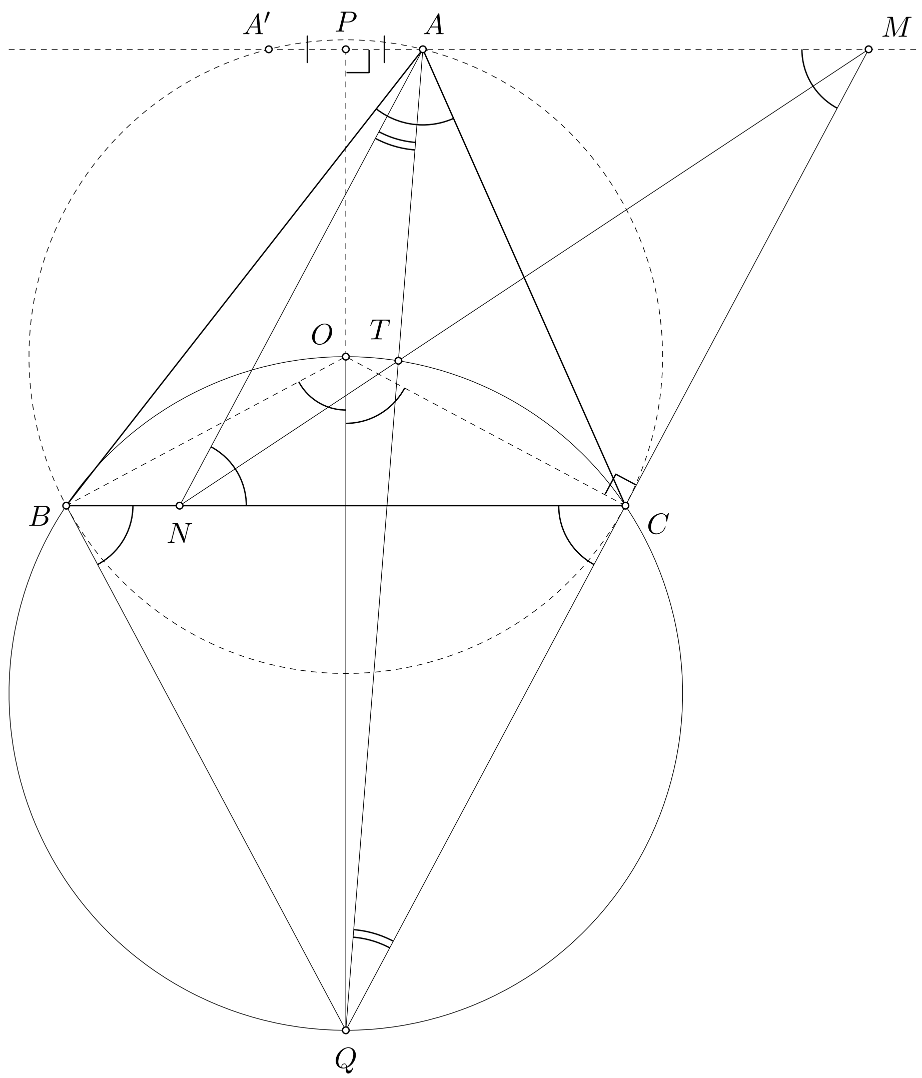
$$\sphericalangle AT'M = \sphericalangle AT'P = \sphericalangle AOP = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = \sphericalangle ABC.$$

Kao u prvom rješenju dokazujemo da je $ABNT'$ tetivni četverokut i da su točke M, N i T' kolinearne, iz čega zaključujemo da je $T \equiv T'$ i tvrdnju zadatku.

Treće rješenje.

Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Kao u prvom rješenju, uočimo da je $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ jer je to središnji kut nad tetivom $\overline{BC}$, te je $\sphericalangle CQB = 180^\circ - 2\alpha$ i $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QBC = \alpha$. Budući da su pravci AM i BC paralelni, slijedi $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BCQ = \alpha$.



Da bismo pokazali da točka T leži na kružnici opisanoj trokutu BOC, dovoljno je pokazati da je $\sphericalangle QTC = \sphericalangle QBC = \alpha$. To je ekvivalentno uvjetu da je $\sphericalangle CTA = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \sphericalangle AMC$, tj. da je četverokut $ATCM$ tetivan.

Dokazat ćemo da je $ATCM$ tetivan tako što ćemo dokazati da su trokuti QTC i QMA slični, tj. da vrijedi

$$|QT| \cdot |QA| = |QC| \cdot |QM|.$$

Uočimo da je pravac OC okomit na pravac QM, pa zaključujemo da je MQ tangenta na opisanu kružnicu trokutu ABC. Neka su A i A' točke presjeka pravca AM s tom kružnicom. Prema poučku o potenciji točke vrijedi

$$|MC|^2 = |MA| \cdot |MA'|.$$

Neka je točka P sjecište pravaca AM i QO. Budući da su pravci AM i BC paralelni, slijedi da je točka P polovište dužine $\overline{AA'}$. Zato vrijedi

$$\begin{aligned}|MC|^2 &= (|MP| - |AP|) \cdot (|MP| + |A'P|)\\ &= (|MP| - |AP|) \cdot (|MP| + |AP|)\\ &= |MP|^2 - |AP|^2.\end{aligned}$$

Koristeći Pitagorin poučak na pravokutne trokute MPQ i APQ dobivamo

$$|MC|^2 = (|MQ|^2 - |PQ|^2) - (|AQ|^2 - |PQ|^2) = |MQ|^2 - |AQ|^2.$$

Iz toga slijedi

$$|AQ|^2 = |MQ|^2 - |MC|^2 = (|MQ| - |MC|) \cdot (|MQ| + |MC|) = |QC| \cdot (|MQ| + |MC|). \tag{10}$$

Budući da su pravci AB i QM paralelni, slijedi $\sphericalangle NAT = \sphericalangle MQT$, a kako su vršni kutovi $\sphericalangle ATN$ i $\sphericalangle QTM$ jednaki, zaključujemo da su trokuti ATN i QTM slični. Slijedi

$$\frac{|AT|}{|QT|} = \frac{|AN|}{|QM|}, \qquad \text{tj.} \quad |QT| = \frac{|QM|}{|AN|} \cdot |AT|.$$

Četverokut $ANCM$ je paralelogram, pa je $|AN| = |MC|$ i vrijedi

$$|QT| = \frac{|QM|}{|MC|} \cdot |AT| = \frac{|QM|}{|MC|} \cdot (|QA| - |QT|).$$

Sređivanjem dobivamo

$$|QT| = \frac{|QM|}{|QM| + |MC|} \cdot |QA|. \tag{11}$$

Iz (10) i (11) slijedi $|QT| \cdot |QA| = |QC| \cdot |QM|$. Time je dokaz završen.

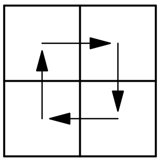
Zadatak A-4.5.

Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak.

Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

Rješenje.

Tvrdimo da je traženi najmanji broj bubamara jednak $2016^2 + 1$. Pokažimo najprije da postoji početna pozicija i kretanje za 2016^2 bubamara tako da se u niti jednom trenutku dvije bubamare neće naći na istom polju. Bubamare smjestimo u donji lijevi 2016×2016 kvadrat dane ploče i neka se sve kreću jednako: gore, desno, dolje, lijevo, gore, desno... Vidimo da se u prva 4 koraka nikoje dvije neće naći na istom polju, a kako se nakon 4 koraka vraćamo na početak, vidimo da se nikada neće dvije bubamare naći na istom polju.



Pokažimo sada da ukoliko se na ploči nalazi 2016^2+1 bubamara, neovisno o početnom rasporedu i pomacima, neke dvije će se u nekom trenutku naći na istom polju.

Obojimo polja ploče u 4 boje, A, B, C i D, na način da polja u neparnim retcima bojamo naizmjence bojama A i B, a ona u parnim retcima naizmjence bojama C i D. Za polje obojano bojom A kratko kažemo A-polje.

A	B	A	B		A	B	A
C	D	C	D	$\cdots$	C	D	C
A	B	A	B		A	B	A
		$\vdots$		$\iddots$		$\vdots$	
C	D	C	D	$\cdots$	C	D	C
A	B	A	B		A	B	A

U rješenju su nam ključne sljedeće dvije činjenice. Bubamara koja se nalazi na B-polju ili C-polju nakon *jednog* koraka prelazi na A-polje ili D-polje. Također, bubamara koja se nalazi na A-polju nakon *dva* koraka prelazi na D-polje.

Na ploči se nalazi 2016^2+1 bubamara pa možemo pretpostaviti da se njih barem $1008 \cdot 2016+1$ nalazi na A-polju ili D-polju. U suprotnom ih je barem $1008 \cdot 2016 + 1$ na B-polju ili C-polju, pa nakon jednog koraka postižemo da je veći broj bubamara na A-poljima i C-poljima. Budući da broj D-polja iznosi 1008^2, na A-poljima se nalazi barem $1008^2 + 1$ bubamara.

Sve bubamare koje se nalaze na A-poljima će nakon dva koraka prijeći na D-polja, što znači da se na 1008^2 D-polja nalazi barem $1008^2 + 1$ bubamara, tj. neke dvije bubamare će se naći na istom polju.