Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

1. U jezeru žive crvene i žute ribe. Dvije petine ukupnog broja riba su žute, a ostale su crvene. Tri četvrtine žutih riba su ženke. Ako je poznato da je ukupan broj ženki jednak ukupnom broju mužjaka u jezeru, koliki je udio crvenih mužjaka među svim ribama u jezeru?

2. Neka je S središte kružnice k polumjera duljine 1. Vrhovi A i B kvadrata $ABCD$ leže na kružnici k, a stranica $\overline{CD}$ prolazi točkom S. Odredi duljinu stranice kvadrata $ABCD$.

3. Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{a2017b}$ bude djeljiv brojem 72.

4. Od 512 malih sivih kockica sastavljena je kocka $8 \times 8 \times 8$, a zatim su tri strane te kocke obojane bijelom bojom, a preostale tri strane crvenom bojom. Ako svaka od osam malih kockica u vrhovima velike kocke ima barem jednu bijelu i barem jednu crvenu stranu, koliko je ukupno malih kockica koje imaju barem jednu crvenu i barem jednu bijelu stranu?

5. Neka su x i y međusobno različiti realni brojevi takvi da vrijedi

$$x + 4 = (y-2)^2 \quad \text{i} \quad y + 4 = (x-2)^2.$$

Odredi $x^2 + y^2$.

* * *

6. Neka je $ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| : |AD| = 2 : 3$ i neka je točka E na stranici $\overline{AD}$ takva da je $|AE| = |AB|$. Točka F odabrana je na polupravcu AB tako da trokut AFE i četverokut $CDEF$ imaju jednake površine. Odredi omjer $|AB| : |BF|$.

7. Dokaži da među bilo koja tri prirodna broja možemo odabrati dva, nazovimo ih a i b, tako da broj $a^3b - ab^3$ bude djeljiv brojem 10.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z^3 = \overline{z}$.

2. Odredi skup svih realnih brojeva a za koje jednadžba

$$x^2 - (5-a)x + a^2 - 11a - 46 = 0$$

ima dva realna rješenja od kojih je jedno manje od 2, a drugo veće od 2.

3. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $8a^2 + 1 = b^2$. Dokaži da je broj ab djeljiv s 3.

4. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ promjeri kružnice k sa središtem S i neka je $\sphericalangle BAD = 28^\circ$. Kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku S siječe kružnicu k u točkama E i F, pri čemu su D i F s iste strane pravca AB. Odredi $\sphericalangle CFS$.

5. Neka je n prirodni broj. Vrhovi pravilnog $2n$-terokuta naizmjence su obojani crveno i plavo, te su nacrtane sve njegove stranice i dijagonale. Ako je broj dužina koje spajaju vrhove iste boje jednak 3192, odredi broj dužina koje spajaju vrhove različitih boja.

$* \quad * \quad *$

6. U trapezu $ABCD$ površine 25 s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, točka P je sjecište dijagonala. Ako površina trokuta CDP iznosi 9, odredi površinu trokuta ABP.

7. Za rastavljanje šahovske ploče dimenzija 8×8 na disjunktne pravokutnike kažemo da je *raznovrsno* ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

- svaki pravokutnik u rastavu sadrži jednak broj crnih i bijelih polja;
- ne postoje dva pravokutnika koja sadrže isti broj polja.

Odredi najveći prirodni broj n za koji postoji raznovrsno rastavljanje ploče dimenzija 8×8 na n pravokutnika.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

1. Odredi racionalne brojeve a i b takve da vrijedi

$$\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = a + \sqrt{b}.$$

2. Neka su x i y pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$2^{x^2} = 16^y \qquad \text{i} \qquad \log_{\sqrt{2017}} x + \log_{2017} y > 0.$$

Dokaži da je $y > \frac{1}{2}$.

3. Broj koji se sastoji samo od znamenki 2 i 3 nazivamo *veselim*. Dakle, veseli brojevi su redom $2, 3, 22, 23, \ldots$. Odredi 2050. veseli broj.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$mn^2 = 100(n+1).$$

5. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem je $\sphericalangle BAC = 75^\circ$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$, a M i N redom nožišta visina iz vrhova B i C. Odredi $\sphericalangle MPN$.

* * *

6. Nad stranicama šiljastokutnog trokuta ABC nacrtani su prema van jednakostranični trokuti BCD, ACE i ABF. Neka je M polovište stranice $\overline{BD}$, a O središte trokuta ACE. Dokaži da je $|AM| : |OF| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. U koordinatnoj ravnini označeno je 20 točaka s cjelobrojnim koordinatama, pri čemu nikoje tri točke ne leže na istom pravcu. Dokaži da postoji trokut čiji vrhovi su označene točke i čije težište je također točka s cjelobrojnim koordinatama.

(Kažemo da je $T(x, y)$ točka s cjelobrojnim koordinatama ako su x i y cijeli brojevi.)

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2017.

1. Odredi sve prirodne brojeve b za koje jednakost $11 \cdot 22 \cdot 33 = 13310$ vrijedi u brojevnom sustavu s bazom b.

2. Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekurzivno:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, \quad y_1 = 1, \\ x_{n+1} &= 3x_n + y_n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}; \\ y_{n+1} &= x_n + 3y_n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokaži da je $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

3. U pravokutniku s vrhovima $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$ nasumično je odabrana točka T. Odredi vjerojatnost da je točka T bliža točki A nego točki $P(2,1)$.

4. Odredi najmanji višekratnik broja 84 koji u dekadskom zapisu ima samo znamenke 6 i 7.

5. Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva čije su znamenke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, a nikoje tri uzastopne znamenke nisu ni 123, ni 246, ni 678 ?

* * *

6. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = 1$ i neka su a i b realni brojevi za koje je $a + b = 1$. Dokaži da vrijedi

$$|az_1 + bz_2| \geqslant \frac{1}{2}|z_1 + z_2|.$$

7. Točke A, B i C leže na krivulji (hiperboli) čija je jednadžba $xy = 1$. Dokaži da ortocentar trokuta ABC također leži na toj krivulji.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.