DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način: Grafički prikažimo udaljenosti navedenih gradova:

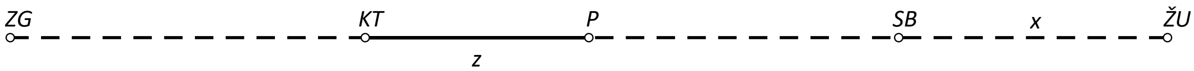
Ako udaljenost između Slavonskog Broda i Županje označimo sa x, onda je udaljenost Slavonskog Broda i Zagreba $3x$ i vrijedi $x + 3x = 256$. Iz $4x = 256$ izračuna se $x = 64$.
Udaljenost između Slavonskog Broda i Županje iznosi 64 km.

Ako udaljenost između Kutine i Zagreba označimo sa y, onda između Kutine i Županje ima $y + 92$ i vrijedi $y + y + 92 = 256$. Iz $2y = 164$ dobiva se $y = 82$.
Udaljenost između Kutine i Zagreba iznosi 82 km.

Konačno, udaljenost između Kutine i Slavonskog Broda je $256 – (82 + 64) = 110$ km.

Drugi način: Grafički prikažimo udaljenosti navedenih gradova:

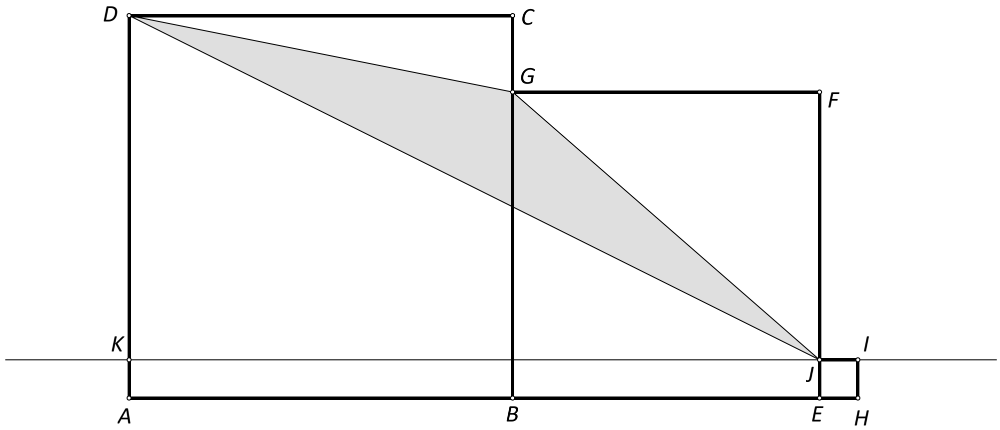
Ako udaljenost između Slavonskog Broda i Županje označimo sa x, onda je udaljenost Slavonskog Broda i Zagreba $3x$ i vrijedi $x + 3x = 256$. Iz $4x = 256$ izračuna se $x = 64$.
Udaljenost između Slavonskog Broda i Županje iznosi 64 km, a između Zagreba i Slavonskog Broda udaljenost je 192 km.



Ako je točka P točno na pola puta između Zagreba i Županje, ona je od Zagreba i Županje udaljena 128 km, a od Slavonskog Broda $128 – 64 = 64$ km. Uz oznake kao na slici udaljenost Zagreba i Kutine iznosi $(128 – z)$ km, a udaljenost Kutine i Županje $(z + 128)$ km. Budući da je udaljenost Kutine i Županje 92 km veća od udaljenosti Zagreba i Kutine vrijedi $(128 – z) + 92 = z + 128$. Zaključuje se da je $2z = 92$, tj. da je $z = 46$ km.

Konačno, udaljenost Kutine i Slavonskog Broda iznosi $46 + 64 = 110$ km.

2. **Prvi način:**
Ako je površina kvadrata $ABCD$ 1 dm^2, onda je duljina njegove stranice $a = 1$ dm = 10 cm, a ako je površina kvadrata $BEFG$ 64 cm^2, onda je duljina njegove stranice $b = 8$ cm te ako je površina kvadrata $EHIJ$ 100 mm^2, onda je duljina njegove stranice $c = 10$ mm = 1 cm.

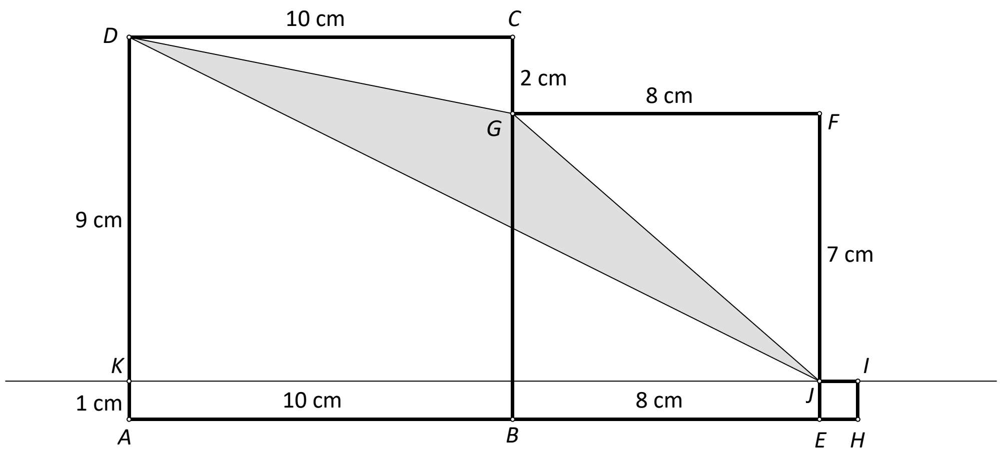


Neka je K točka na dužini $\overline{AD}$ pri čemu je $|AK| = 1$ cm.

$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) – (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$
$p(AEJK) = (a + b) \cdot c = (10 + 8) \cdot 1 = 18 \text{ cm}^2$
$p(KJD) = (a + b) \cdot (a – c) : 2 = (10 + 8) \cdot (10 – 1) : 2 = 18 \cdot 9 : 2 = 81 \text{ cm}^2$
$p(JFG) = b \cdot (b – c) : 2 = 8 \cdot (8 – 1) : 2 = 8 \cdot 7 : 2 = 28 \text{ cm}^2$
$p(GCD) = a \cdot (a – b) : 2 = 10 \cdot (10 – 8) : 2 = 10 \cdot 2 : 2 = 10 \text{ cm}^2$

$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) – (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$
$p(DJG) = 100 + 64 – (18 + 81 + 28 + 10)$
$p(DJG) = 164 – 137$
$p(DJG) = 27 \text{ cm}^2$

Drugi način:
Ako je površina kvadrata $ABCD$ 1 dm^2, onda je duljina njegove stranice 1 dm = 10 cm, a ako je površina kvadrata $BEFG$ 64 cm^2, onda je duljina njegove stranice 8 cm te ako je površina kvadrata $EHIJ$ 100 mm^2, onda je duljina njegove stranice 10 mm = 1 cm.
Neka je K točka na dužini $\overline{AD}$ pri čemu je $|AK| = 1$ cm.



$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) – (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$
Uvažavajući duljine stranica trokuta i četverokuta naznačenih na slici izračunava se:
$p(AEJK) = (10 + 8) \cdot 1 = 18 \text{ cm}^2$
$p(KJD) = (10 + 8) \cdot 9 : 2 = 18 \cdot 9 : 2 = 81 \text{ cm}^2$

$p(JFG) = 8 \cdot 7 : 2 = 28 \text{ cm}^2$
$p(GCD) = 10 \cdot 2 : 2 = 10 \text{ cm}^2$

Tada je:
$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) – (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$
$p(DJG) = 100 + 64 – (18 + 81 + 28 + 10)$
$p(DJG) = 164 – 137$
$p(DJG) = 27 \text{ cm}^2$

3. **Prvi način:** Plaćanje s dva bona znači da je Petra za sastojke za ručak potrošila ili 30 kn ili 35 kn ili 40 kn, a to je $\frac{1}{5}$ ukupnog iznosa.

Za ostale dnevne potrebe dala je polovinu preostalog novca, dakle $\frac{1}{2}$ od $\frac{4}{5}$ što je $\frac{2}{5}$ ukupnog iznosa.
Dakle, za ostale dnevne potrebe potrošila je dvostruko više nego za ručak, tj. 60 kn, 70 kn ili 80 kn.
Kako je taj iznos plaćen s tri bona tada bi iznosi bili:

$15 + 15 + 15 = 45$

$15 + 15 + 20 = 50$

$15 + 20 + 20 = 55$

$20 + 20 + 20 = 60$

To je moguće samo ako je jedna petina svote jednaka 30 kn, a dvije petine svote 60 kuna. Stoga je ukupni iznos bonova jednak $5 \cdot 30$ kn = 150 kn.

Drugi način: Plaćanje s dva bona znači da je Petra za sastojke za ručak potrošila ili 30 kn ili 35 kn ili 40 kn, a to je $\frac{1}{5}$ ukupnog iznosa. Prema tome, ukupna svota mogla je biti ili 150 kn ili 175 kn ili 200 kn. Za ostale dnevne potrebe potrošila je polovinu preostalog novca, dakle $\frac{2}{5}$ ukupnog iznosa.
Taj iznos plaćen s tri bona što znači da je mogao iznositi $3 \cdot 15 = 45$ kn, $2 \cdot 15 + 20 = 50$ kn, $15 + 2 \cdot 20 = 55$ kn ili $3 \cdot 20 = 60$ kn. No, $\frac{2}{5}$ svote ne može biti neparan broj, što znači da je za ostale potrebe Petra potrošila 50 kn ili 60 kn. To znači da bi ukupna svota mogla biti
$(50 : 2) \cdot 5 = 125$ kn ili $(60 : 2) \cdot 5 = 150$ kn.
Oba uvjeta zadovoljava samo iznos od 150 kn.

Treći način: Petra je ručak platila s dva bona i potrošila je $\frac{1}{5}$ ukupne količine novca. To je mogla napraviti na sljedeće načine:

a) Ručak je platila s dva bona od 15 kn, što iznosi 30 kn.
Ako je $\frac{1}{5}$ količine novca 30 kn, onda je ukupno imala $5 \cdot 30 = 150$ kn.

b) Ručak je platila s jednim bonom od 15 kn i jednim od 20 kn, što iznosi 35 kn.
Ako je $\frac{1}{5}$ količine novca 35 kn, onda je ukupno imala $5 \cdot 35 = 175$ kn.

c) Ručak je platila s dva bona od 20 kn, što iznosi 40 kn.

Ako je $\frac{1}{5}$ količine novca 40 kn, onda je ukupno imala 5 · 40 = 200 kn.

Polovinu preostalog novca dala je za ostale dnevne namirnice i platila ih je s tri bona. Za to je najviše mogla potrošiti 3 · 20 = 60 kn.

U prvom slučaju, nakon što je platila ručak, ostalo joj je 150 – 30 = 120 kn. Polovina od 120 je 60, dakle ostale namirnice je platila s tri bona od 20 kn jer u drugom i trećem slučaju je polovina ostalog novca veća od 60 kn. (175 – 35 = 140, 140 : 2 = 70 i 200 – 40 = 160, 160 : 2 = 80).

Dakle, ukupna novčana vrijednost bonova je 150 kn.

4. **Prvi način:** Označimo s C broj crvenih kuglica, sa $Ž$ broj žutih kuglica, a s P broj plavih kuglica.
Iz uvjeta zadatka vrijedi da je:
$C + Ž + P = 1500$
$3 \cdot C = 5 \cdot Ž$
$2 \cdot C = 5 \cdot P$
Peterokratnik broja crvenih kuglica jednak je peterokratniku zbroja plavih i žutih kuglica, što znači da crvenih kuglica ima isto koliko je žutih i plavih kuglica zajedno, tj. $C = Ž + P$.
Znači da je 1500 dvostruko veći od broja crvenih kuglica, tj. $C + C = 1500$, odnosno $2 \cdot C = 1500$.
Tada je $C = 1500 : 2$, tj. $C = 750$.

Za broj žutih kuglica vrijedi $3 \cdot 750 = 5 \cdot Ž$, a za broj plavih kuglica $2 \cdot 750 = 5 \cdot P$.

$5 \cdot Ž = 2250$	$5 \cdot P = 1500$
$Ž = 2250 : 5$	$P = 1500 : 5$
$Ž = 450$	$P = 300$

U kutiji ima 300 plavih kuglica, 750 crvenih i 450 žutih kuglica.

Dvokratnik broja žutih kuglica je 2 · 450 = 900, što je tri puta veće od broja plavih kuglica.

Drugi način: Označimo s C broj crvenih, sa $Ž$ broj žutih, a s P broj plavih kuglica.
Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $3 \cdot C = 5 \cdot Ž$ i $2 \cdot C = 5 \cdot P$.
Tada je $Ž = \frac{3}{5}$ broja crvenih kuglica, odnosno $P = \frac{2}{5}$ broja crvenih kuglica, što znači da žute i plave kuglice zajedno daju $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$ broja crvenih kuglica. Dakle, žutih i plavih kuglica zajedno ima koliko i crvenih kuglica. Budući da je ukupan broj kuglica jednak 1500, zaključujemo da polovina tog broja, 1500 : 2 = 750, otpada na crvene kuglice. Žutih kuglica tada ima (750 : 5) · 3 = 150 · 3 = 450, a plavih 750 – 450 = 300.

Dvokratnik broja žutih kuglica je 2 · 450 = 900, što je tri puta veće od broja plavih kuglica.

Treći način: Označimo s C broj crvenih kuglica, sa $Ž$ broj žutih kuglica, a s P broj plavih kuglica.
Iz uvjeta zadatka vrijedi da je:

$3 \cdot C = 5 \cdot Ž$
$2 \cdot C = 5 \cdot P$
$C + Ž + P = 1500$
To znači da je:
$5 \cdot C + 5 \cdot Ž + 5 \cdot P = 7500$, odnosno $5 \cdot C + 3 \cdot C + 2 \cdot C = 7500$.

$10 \cdot C = 7500$
$C = 750$
Iz $3 \cdot C = 5 \cdot Ž$ dobijemo $Ž = 450$, a iz $2 \cdot C = 5 \cdot P$ je $P = 300$.
U kutiji ima 300 plavih, 750 crvenih i 450 žutih kuglica.

5. Prvi način: Neka je $n = \overline{abcd}$, gdje su a, b, c i d različite znamenke.
Broj je djeljiv brojem 5 ako je njegova znamenka jedinica 0 ili 5.
Kako je n višekratnik broja 5, znamenka $d = 0$ ili $d = 5$ pa je broj n oblika $\overline{abc0}$ ili $\overline{abc5}$.
Broj je djeljiv brojem 9 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv brojem 9.

n	$\overline{abc0}$	$\overline{abc5}$
Troznamenkasti broj bez tisućice je djeljiv brojem 9:	$\overline{bc0}$ $b + c = 9$ ili $b + c = 18$	$\overline{bc5}$ $b + c + 5 = 9$ ili $b + c + 5 = 18$
	$b + c = 18$ ne može biti, jer bi bilo $b = c = 9$	$b + c = 4$ ili $b + c = 13$
	$b + c = 9 \rightarrow b = 1, c = 8$ $b = 2, c = 7$ $b = 3, c = 6$ $b = 4, c = 5$ $b = 5, c = 4$ $b = 6, c = 3$ $b = 7, c = 2$ $b = 8, c = 1$	$b + c = 4 \rightarrow b = 0, c = 4$ $b = 1, c = 3$ $b = 3, c = 1$ $b = 4, c = 0$ $b + c = 13 \rightarrow b = 4, c = 9$ $b = 6, c = 7$ $b = 7, c = 6$ $b = 9, c = 4$
Troznamenkasti broj bez stotice je djeljiv brojem 11:	$\overline{ac0}$ 110, 220, … otpadaju zbog jednakih znamenaka	$\overline{ac5}$ $b = 0, c = 4 \rightarrow \overline{a45}$ nema takvog broja djeljivog brojem 11 $b = 1, c = 3 \rightarrow \overline{a35} \rightarrow 935$ (9135) $b = 3, c = 1 \rightarrow \overline{a15} \rightarrow 715$ (7315) $b = 4, c = 0 \rightarrow \overline{a05} \rightarrow 605$ (6405) $b = 4, c = 9 \rightarrow \overline{a95} \rightarrow 495$ (4495) otpada $b = 6, c = 7 \rightarrow \overline{a75} \rightarrow 275$ (2675) $b = 7, c = 6 \rightarrow \overline{a65} \rightarrow 165$ (1765) $b = 9, c = 4 \rightarrow \overline{a45}$ nema takvog broja djeljivog brojem 11

Troznamenkasti broj bez desetice je djeljiv brojem 7:		9135 $\rightarrow$ 915 nije djeljiv brojem 7 **7315** $\rightarrow$ 735 je djeljiv brojem 7 6405 $\rightarrow$ 645 nije djeljiv brojem 7 2675 $\rightarrow$ 265 nije djeljiv brojem 7 **1765** $\rightarrow$ 175 je djeljiv brojem 7

Postoje dva četveroznamenkasta broja s traženim svojstvima, to su 7315 i 1765.

Drugi način: Neka je $n = \overline{abcd}$, gdje su a, b, c i d različite znamenke.
Broj je djeljiv brojem 5 ako je njegova znamenka jedinica 0 ili 5.
Kako je n višekratnik broja 5, znamenka $d = 0$ ili $d = 5$ pa je broj n oblika $\overline{abc0}$ ili $\overline{abc5}$.

Kako troznamenkasti broj $\overline{ac0}$ ili $\overline{ac5}$ koji je ostao u zapisu nakon brisanja znamenke stotice mora biti djeljiv brojem 11, on mora biti djeljiv i brojem 55.
Troznamenkasti brojevi djeljivi brojem 55 su: 110, 165, 220, 275, 330, 385, 440, 495, 550, 605, 660, 715, 770, 825, 935 i 990. Kako znamenke traženog broja moraju biti različite, preostaju brojevi: 165, 275, 385, 495, 605, 715, 825 i 935.

Znači, četveroznamenkasti brojevi su oblika: $\overline{1b65}$, $\overline{2b75}$, $\overline{3b85}$, $\overline{4b95}$, $\overline{6b05}$, $\overline{7b15}$, $\overline{8b25}$ i $\overline{9b35}$.

Korištenjem uvjeta da troznamenkasti broj nastao brisanjem znamenke tisućice mora biti djeljiv brojem 9, a broj je djeljiv brojem 9 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv brojem 9, slijedi:
$\overline{b65}$ $\rightarrow$ $b + 11$ može biti 18, odnosno $b = 7$ $\rightarrow$ 1765
$\overline{b75}$ $\rightarrow$ $b + 12$ može biti 18, odnosno $b = 6$ $\rightarrow$ 2675
$\overline{b85}$ $\rightarrow$ $b + 13$ može biti 18, odnosno $b = 5$ $\rightarrow$ 3585, otpada zbog dviju jednakih znamenaka
$\overline{b95}$ $\rightarrow$ $b + 14$ može biti 18, odnosno $b = 4$ $\rightarrow$ 4495, otpada zbog dviju jednakih znamenaka
$\overline{b05}$ $\rightarrow$ $b + 5$ može biti 9, odnosno $b = 4$ $\rightarrow$ 6405
$\overline{b15}$ $\rightarrow$ $b + 6$ može biti 9, odnosno $b = 3$ $\rightarrow$ 7315
$\overline{b25}$ $\rightarrow$ $b + 7$ može biti 9, odnosno $b = 2$ $\rightarrow$ 8225, otpada zbog dviju jednakih znamenaka
$\overline{b35}$ $\rightarrow$ $b + 8$ može biti 9, odnosno $b = 1$ $\rightarrow$ 9135

Za brojeve 1765, 2675, 6405, 7315 i 9135 treba ispitati djeljivost brojem 7 troznamenkastih brojeva nastalih brisanjem njihove znamenke desetice.

1765 $\rightarrow$ $175 = 7 \cdot 25$
2675 $\rightarrow$ 265 nije djeljiv brojem 7
6405 $\rightarrow$ 645 nije djeljiv brojem 7
7315 $\rightarrow$ $735 = 7 \cdot 105$
9135 $\rightarrow$ 915 nije djeljiv brojem 7
Postoje dva četveroznamenkasta broja s traženim svojstvima, to su 7315 i 1765.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Izračunajmo Gaussovom dosjetkom zbroj u brojniku prvog razlomka:

$$2+4+6+...+2018=2\cdot(1+2+3+...+1009)=2\cdot\frac{1010\cdot1009}{2}=1010\cdot1009.$$

Koristeći ovaj prethodni račun možemo izračunati zbroj u nazivniku prvog razlomka:

$$1+3+5+...+2017=(1+2+3+...+2018)-(2+4+6+...+2018)=\frac{2018\cdot2019}{2}-1010\cdot1009=$$

$$=1009\cdot2019-1009\cdot1010=1009\cdot(2019-1010)=1009\cdot1009.$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobit ćemo:

$$\frac{1010\cdot1009}{1009\cdot1009}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2018}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1010}{1009}-\frac{1}{2018}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2020-1}{2018}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2019}{2018}$$

$$x=\frac{2018}{2019}$$

Drugi način:

Izračunajmo Gaussovom dosjetkom zbroj u brojniku prvog razlomka.

$$2+4+6+...+2018=\frac{2020\cdot1009}{2}=1010\cdot1009 .$$

Isto tako, Gaussovom dosjetkom izračunajmo zbroj u nazivniku prvog razlomka.

$$1+3+5+...+2017=\frac{2018\cdot1009}{2}=1009\cdot1009 .$$

Dalje je sve isto kao u prvom načinu rješavanja.

2. a) Od navedenih godina sve su imale 365 dana osim 2004. godine koja je imala 366 dana.
To je ukupno $365\cdot4+366=1460+366=1826$ dana.
Imamo 2018 natjecatelja i 1826 mogućih datuma rođenja što znači da je barem dvoje učenika rođeno istog dana, mjeseca i godine.

b) U jednoj godini postoji (najviše) 366 mogućih datuma rođenja. Stoga prema danu i mjesecu rođenja natjecatelje možemo razvrstati u 366 grupa.
Kako je $2018=5\cdot366+188$, postoji barem jedna grupa u kojoj je najmanje 6 natjecatelja.
(**Obrazloženje:** U najgorem slučaju, ako u svakoj od 366 grupa ima po 5 natjecatelja, bilo koji od preostalih 188 natjecatelja je rođen istog dana i mjeseca kao i netko iz tih 366 grupa.)

3. Označimo s p broj kuglica plave boje u kutiji, a s c broj kuglica crvene boje u kutiji.
Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$\frac{1}{4}(p+c-3)=c-3,$$

i $$\frac{1}{3}(p+c-7)=c.$$

Množenjem prve jednadžbe s 4 i druge s 3 dobivamo sustav:
$p + c - 3 = 4c - 12$,
$p + c - 7 = 3c$.
Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo:
$4 = c - 12$,
odnosno $c = 16$.
Iz prve jednadžbe slijedi $p = 3c - 9 = 3 \cdot 16 - 9 = 48 - 9 = 39$.
Stoga je $n = p + c = 39 + 16 = 55$.

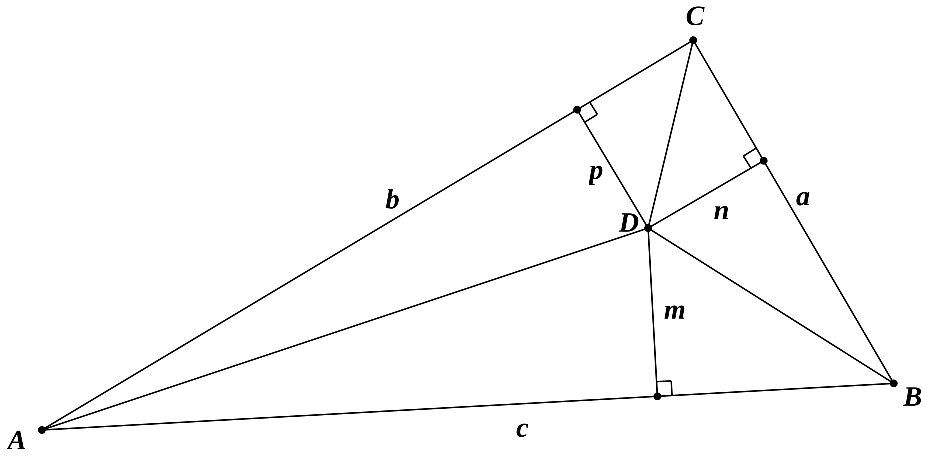
4. $\overline{abc}+2\cdot\overline{cba}=100a+10b+c+2\cdot(100c+10b+a)=$
$=100a+10b+c+200c+20b+2a=102a+30b+201c.$
Kako je $102=17\cdot 6$, $102a$ je djeljivo sa 17, pa mora biti i $30b + 201c$ djeljivo sa 17.
$30b+201c=34b-4b+204c-3c=34b+204c-4b-3c=17(2b+12c)-(4b+3c).$
Kako je $17\cdot(2b+12c)$ djeljivo sa 17, mora biti i $4b + 3c$ djeljivo sa 17.
Vrijedi $0<4b+3c\le 63$ jer su b i c znamenke, $c\ne 0$, pa je najveća moguća vrijednost izraza jednaka $4\cdot 9+3\cdot 9=63$.
Stoga imamo 3 moguća slučaja:

1. slučaj:
$4b + 3c = 17$
Jedino rješenje ovog slučaja je $b = 2$ i $c = 3$, pa su traženi brojevi (a može biti bilo koja znamenka osim nule):
123, 223, 323, 423, 523, 623, 723, 823 i 923.

2. slučaj:
$4b + 3c = 34$
Dva su rješenja: $b = 4$ i $c = 6$ ili $b = 7$ i $c = 2$, pa su traženi brojevi (a može biti bilo koja znamenka osim nule):
146, 246, 346, 446, 546, 646, 746, 846 i 946, odnosno 172, 272, 372, 472, 572, 672, 772, 872 i 972.

3. slučaj:
$4b + 3c = 51$
Dva su rješenja: $b = 6$ i $c = 9$ ili $b = 9$ i $c = 5$, pa su traženi brojevi (a može biti bilo koja znamenka osim nule):
169, 269, 369, 469, 569, 669, 769, 869 i 969, odnosno 195, 295, 395, 495, 595, 695, 795, 895 i 995.

5. U trokutu ΔABC označimo točku D i dužine $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$.



Duljina visine trokuta ΔABD na $\overline{AB}$ je m,
duljina visine trokuta ΔBCD na $\overline{BC}$ je n, a
duljina visine trokuta ΔACD na $\overline{AC}$ je p, pa je:

$P_{\Delta ABD}=\frac{cm}{2}$, $P_{\Delta BCD}=\frac{an}{2}$ i $P_{\Delta ACD}=\frac{bp}{2}$.

Dalje možemo na dva načina:

Prvi način:

Kako je $P_{\Delta ABD}+P_{\Delta BCD}+P_{\Delta ACD}=P_{\Delta ABC}$, vrijedi: $\frac{cm}{2}+\frac{an}{2}+\frac{bp}{2}=\frac{cv_c}{2}$, odnosno

$cm+an+bp=cv_c$.

Podijelimo li dobivenu jednakost s cv_c dobit ćemo: $\frac{cm}{cv_c}+\frac{an}{cv_c}+\frac{bp}{cv_c}=1$, odnosno

$\frac{m}{v_c}+\frac{an}{cv_c}+\frac{bp}{cv_c}=1$.

Kako je $P_{\Delta ABC}=\frac{av_a}{2}=\frac{bv_b}{2}=\frac{cv_c}{2}$, vrijedi: $av_a=bv_b=cv_c$.

Sada je $\frac{m}{v_c}+\frac{an}{av_a}+\frac{bp}{bv_b}=1$, odnosno $\frac{m}{v_c}+\frac{n}{v_a}+\frac{p}{v_b}=1$.

Drugi način:

Kako je $P_{\Delta ABD}+P_{\Delta BCD}+P_{\Delta ACD}=P_{\Delta ABC}$, vrijedi $\frac{cm}{2}+\frac{an}{2}+\frac{bp}{2}=P_{\Delta ABC}$,

odnosno $c\cdot\frac{m}{2}+a\cdot\frac{n}{2}+b\cdot\frac{p}{2}=P_{\Delta ABC}$.

Neka je $P=P_{\Delta ABC}$.

Iz $P=\frac{av_a}{2}$ slijedi da je $a=\frac{2P}{v_a}$,

iz $P=\frac{bv_b}{2}$ slijedi da je $b=\frac{2P}{v_b}$, iz $P=\frac{cv_c}{2}$ slijedi da je $c=\frac{2P}{v_c}$.

Izraze za *a, b* i *c* uvrstimo u $c\cdot\frac{m}{2}+a\cdot\frac{n}{2}+b\cdot\frac{p}{2}=P$:

$$\frac{2P}{v_c}\cdot\frac{m}{2}+\frac{2P}{v_a}\cdot\frac{n}{2}+\frac{2P}{v_b}\cdot\frac{p}{2}=P,$$

odnosno

$$\frac{P}{v_c}\cdot\frac{m}{1}+\frac{P}{v_a}\cdot\frac{n}{1}+\frac{P}{v_b}\cdot\frac{p}{1}=P.$$

Podijelimo li izraz s *P*, dobit ćemo

$$\frac{m}{v_c}+\frac{n}{v_a}+\frac{p}{v_b}=1.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način: Polazna jednadžba ekvivalentna je redom s:

$$4mn - 10m + 6n = 260$$
$$4mn - 10m + 6n - 15 = 245$$
$$2m(2n - 5) + 3(2n - 5) = 245$$
$$(2m + 3)(2n - 5) = 245$$

Rastav broja 245 na proste faktore je $245 = 5 \cdot 7^2$.
Djelitelji broja 245 su: 1, 5, 7, 35, 49 i 245.
S obzirom da je $2m + 3 \geq 5$, prvi je slučaj nemoguć.
Preostaju sljedeće mogućnosti:

(i) $2m + 3 = 5$, $2n - 5 = 49$, odnosno $m = 1$ i $n = 27$;
(ii) $2m + 3 = 7$, $2n - 5 = 35$, odnosno $m = 2$ i $n = 20$;
(iii) $2m + 3 = 35$, $2n - 5 = 7$, odnosno $m = 16$ i $n = 6$;
(iv) $2m + 3 = 49$, $2n - 5 = 5$, odnosno $m = 23$ i $n = 5$;
(v) $2m + 3 = 245$, $2n - 5 = 1$, odnosno $m = 121$ i $n = 3$.

Rješenja su uređeni parovi (1, 27), (2, 20), (16, 6), (23, 5) i (121, 3).

Drugi način: Polazna jednadžba transformira se na sljedeći način:

$$2mn - 5m + 3n = 130$$
$$2mn + 3n = 5m + 130$$
$$n(2m + 3) = 5m + 130$$
$$n = \frac{5m + 130}{2m + 3}$$

Ako je n prirodni broj, onda je i njegov dvokratnik $2n$ također prirodni broj.
Dalje vrijedi:

$$2n = \frac{10m + 260}{2m + 3} = \frac{10m + 15 + 245}{2m + 3} = \frac{5(2m + 3) + 245}{2m + 3} = 5 + \frac{245}{2m + 3}$$

Izraz $2m + 3$ mora biti djelitelj broja 245.
Iz rastava $245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$, zaključit ćemo da su djelitelji broja 245 brojevi 1, 5, 7, 35, 49 i 245.
Mogućnosti su:

$2m + 3 = 1$, pa je $m = -1$ što nije prirodan broj,
$2m + 3 = 5$, pa je $m = 1$ i $n = 27$,
$2m + 3 = 7$, pa je $m = 2$ i $n = 20$,
$2m + 3 = 35$, pa je $m = 16$ i $n = 6$,
$2m + 3 = 49$, pa je $m = 23$ i $n = 5$,
$2m + 3 = 245$, pa je $m = 121$ i $n = 3$.

Rješenja su uređeni parovi (1, 27), (2, 20), (16, 6), (23, 5) i (121, 3).

2. Prvi način: Članovi niza su:

$a_1 = 2,$
$a_2 = 2,$
$a_3 = a_1 - a_2 = 2 - 2 = 0,$
$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 0 = 2,$
$a_5 = a_3 - a_4 = 0 - 2 = -2,$
$a_6 = a_4 + a_5 = 2 + (-2) = 0,$
$a_7 = a_5 - a_6 = -2 - 0 = -2,$
$a_8 = a_6 + a_7 = 0 + (-2) = -2,$
$a_9 = a_7 - a_8 = -2 - (-2) = 0,$
$a_{10} = a_8 + a_9 = -2 + 0 = -2,$
$a_{11} = a_9 - a_{10} = 0 - (-2) = 2,$
$a_{12} = a_{10} + a_{11} = -2 + 2 = 0,$
$a_{13} = a_{11} - a_{12} = 2 - 0 = 2,$
$a_{14} = a_{12} + a_{13} = 0 + 2 = 2,\ldots$

Članovi niza ciklički se ponavljaju: 2, 2, 0, 2 , −2, 0, −2, −2, 0, −2, 2, 0,
pa opet 2, 2, 0, 2 , −2, 0, −2, −2, 0, −2, 2, 0, itd.
U podnizu koji se ponavlja ima 12 članova i njihov je zbroj 0.
Iz $100 = 12 \cdot 8 + 4$ se vidi da u prvih 100 članova zadanog niza ima 8 takvih podnizova te se još ponavljaju prva četiri člana niza.
Zbroj prvih 100 članova zadanog niza je $8 \cdot 0 + 2 + 2 + 0 + 2 = 6$.

Drugi način: Rješenje se može dobiti tako da se svaki član niza izrazi pomoću prva dva člana a_1 i a_2.
Iz a_1 i a_2 dobiva se redom:

$a_3 = a_1 - a_2$
$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + a_1 - a_2 = a_1$
$a_5 = a_3 - a_4 = a_1 - a_2 - a_1 = -a_2$
$a_6 = a_4 + a_5 = a_1 + (-a_2) = a_1 - a_2$
$a_7 = a_5 - a_6 = -a_2 - a_1 + a_2 = -a_1$
$a_8 = a_6 + a_7 = a_1 - a_2 - a_1 = -a_2$
$a_9 = a_7 - a_8 = -a_1 + a_2$
$a_{10} = a_8 + a_9 = -a_2 - a_1 + a_2 = -a_1$
$a_{11} = a_9 - a_{10} = -a_1 + a_2 + a_1 = a_2$
$a_{12} = a_{10} + a_{11} = -a_1 + a_2$
$a_{13} = a_{11} - a_{12} = a_2 + a_1 - a_2 = a_1$
$a_{14} = a_{12} + a_{13} = -a_1 + a_2 + a_1 = a_2 \ldots$

Zbog $a_{13} = a_1$ i $a_{14} = a_2$, ponavljaju se svi ostali članovi niza.
Zbog $100 = 12 \cdot 8 + 4$ vrijedi:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 8 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}) + a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Vrijedi $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} = 4a_1 - 4a_1 + 4a_2 - 4a_2 = 0$ i $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3a_1$,
pa je $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 8 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$.

3. Od sedam računskih zadataka biraju se tri.
Prvi se zadatak može izabrati na 7 načina, drugi na 6, a treći na 5.
To je ukupno $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ mogućnosti.
Budući da je važno samo koji su zadaci izabrani, a ne i njihov poredak,

broj 210 treba podijeliti s brojem različitih rasporeda triju zadataka.
Tri izabrana zadatka mogu se rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.
Tri zadatka za računski dio zadaće mogu se izabrati na $210 : 6 = 35$ načina.
Analogno se računa i broj mogućih odabira dvaju geometrijskih zadataka, od predloženih 5.
Prvi se zadatak može izabrati na 5 načina, a drugi na 4 načina.
To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti.
I ovdje treba taj broj podijeliti s brojem različitih rasporeda dvaju zadataka, a to je 2.
Dva zadatka za geometrijski dio zadaće mogu se izabrati na $20 : 2 = 10$ načina.
Konačno, bilo koji izbor računskih zadataka može se kombinirati s bilo kojim izborom geometrijskih zadataka, pa je ukupan broj načina na koje možemo izabrati zadatke za državno natjecanje $35 \cdot 10 = 350$ načina.

4. Označimo sa x, $x < 1$, dio posude koji je ispunjen 85-postotnim alkoholom.
Broj postotaka alkohola u posudi iznosi $85x$.
Neispunjeni dio posude iznosi $1 - x$ i toliko će biti dodano 21-postotnog alkohola.
Njegov udio u posudi iznosi $21(1 - x)$ % .
Broj postotaka alkohola u posudi sada je $21(1 - x) + 85x = 21 + 64x$.
Ponovo se odlije $1 - x$ smjese te se količina alkohola smanjila za $(1 - x)(21 + 64x)$.
Drugim dolijevanjem 21-postotnog alkohola količina alkohola se povećala za $21(1 - x)$.
Na kraju je dobivena 70-postotna otopina alkohola, pa vrijedi:
$21 + 64x - (1 - x)(21 + 64x) + 21(1 - x) = 70$
Množenjem i pojednostavljivanjem dobivamo jednadžbu:
$64 \cdot x \cdot x = 49$

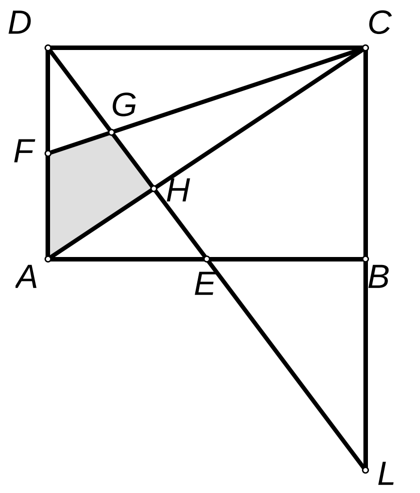
$$x \cdot x = \frac{49}{64}$$

$$x \cdot x = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{7}{8}$$

Prije dolijevanja bilo je napunjeno $\frac{7}{8}$ posude.

5. Kutovi $\angle EAH$ i $\angle DCH$, odnosno $\angle AEH$ i $\angle CDH$, su parovi šiljastih kutova uz presječnice usporednih pravaca pa su ti parovi kutova jednakih veličina.
Onda su, prema KK poučku, trokuti AEH i CDH slični.
Tada je $\frac{|AH|}{|CH|} = \frac{|AE|}{|CD|} = \frac{1}{2}$.
Zato je $|AH| = \frac{|HC|}{2} = \frac{|AC|}{3}$, odnosno $p_{AHD} = \frac{1}{3} p_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 1$.



Neka je L presjek pravaca DE i CB.

Vrijedi $|\angle AED| = |\angle BEL|$ (vršni kutovi) i $|\angle EAD| = |\angle EBL| = 90°$.

Također je $|AE| = |BE|$ (točka E je polovište stranice $\overline{AB}$).

Stoga su trokuti ADE i BLE sukladni po KSK poučku.

Onda je $|BL| = |AD| = 2$ pa je $|CL| = |CB| + |BL| = 4$.

Kutovi $\angle FDG$ i $\angle CLG$, odnosno $\angle GFD$ i $\angle GCL$ su parovi šiljastih kutova uz presječnice usporednih pravaca pa su ti parovi kutova jednakih veličina.

Onda su, prema KK poučku, trokuti DFG i LCG slični.

Tada je $\frac{|FG|}{|CG|} = \frac{|DF|}{|LC|} = \frac{1}{4}$.

Zato je $|FG| = \frac{|CG|}{4} = \frac{|CF|}{5}$, odnosno $p_{DFG} = \frac{1}{5} p_{DFC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{10}$.

Konačno, $p_{AHGF} = p_{AHD} - p_{DFG} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN

1. Kada bi bilo koji od brojeva a, b, c bio jednak 0, onda bi i preostali brojevi morali biti jednaki nuli, dakle (0, 0, 0) je jedna uređena trojka.
Kada bi brojevi a, b, c bili različiti od nule, tada $ab = c$ i $ac = b \Rightarrow a(ab) = b \Rightarrow a^2b = b$.
Podijelivši dobiveni izraz s $b \neq 0$ slijedi $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

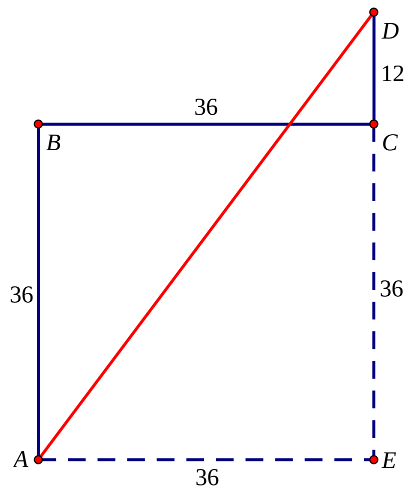
Promotrimo dva slučaja:

1.) $a = 1 \Rightarrow b = c$ i $bc = 1$ pa su rješenja uređene trojke (1, 1, 1) i (1, −1, −1).

2.) $a = -1 \Rightarrow b = -c$ i $bc = -1$ pa su rješenja uređene trojke (− 1, 1, −1) i (−1, −1, 1).

Ukupno ima 5 uređenih trojki realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

2. Brod je prvo plovio sat vremena brzinom od 36 km/h, dakle prešao je 36 km prema sjeveru. Prema istoku je prešao također 36 km, brzinom od 72 km/h.
Za to mu je trebalo dvostruko manje vremena, dakle 0.5 sata.
Brzinom 72 km/h plovio je ponovno prema sjeveru i to 10 minuta ili $\frac{1}{6}$ sata.
U trećoj etapi prešao je 72 : 6 km = 12 km.
Putanja broda može se prikazati skicom:



Udaljenost od luke (točka A) do cilja (točka D) može se izračunati iz pravokutnog trokuta AED s katetama 36 i 48, primjenom Pitagorinog poučka, tj. brod je od luke udaljen 60 km.
Prosječnu brzinu izračunat ćemo tako da ukupnu duljinu puta koju je brod prešao podijelimo s vremenom plovidbe. Prvih 36 km prešao je za 1 h, drugih 36 km za pola sata, a posljednjih 12 km za 10 minuta.

Dakle, brod je ukupno prešao 84 km, a za to mu je trebalo $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$ sata.

Prosječna brzina je $84:\frac{5}{3}$ km/h = $\frac{252}{5}$ km/h = 50.4 km/h.

3. Najprije odredimo najmanji prirodan broj k_1 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_1 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5.

Analizirajmo ostatke kvadrata prirodnih brojeva pri dijeljenju brojem 5. Neka je *l* prirodan broj i *n = 5l*. Tada je:

$n^2=25l^2=5\cdot 5l^2$,

$\left(n+1\right)^2=(5l+1)^2=25l^2+10l+1=5(5l^2+2l)+1$,

$\left(n+2\right)^2=(5l+2)^2=25l^2+20l+4=5(5l^2+4l)+4$,

$(n+3)^2=(5l+3)^2=25l^2+30l+9=5(5l^2+6l+1)+4$,

$(n+4)^2=(5l+4)^2=25l^2+40l+16=5(5l^2+8l+3)+1$.

Iz gore navedenog slijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih 5 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5. (1)

S obzirom da su ostaci kvadrata prirodnog broja pri dijeljenju brojem 5 redom 1, 4, 4, 1, 0, itd., najmanji prirodan broj k_1 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_1 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5 je upravo $k_1=5$. (Očito je $k_1\neq 1$, jer možemo uzeti broj koji nije djeljiv brojem 5, $k_1\neq 2$, jer možemo npr. uzeti dva susjedna od kojih je jedan djeljiv brojem 5, $k_1\neq 3$, jer možemo uzeti brojeve koji daju ostatke 1, 4 i 4 pri dijeljenju brojem 5, $k_1\neq 4$, jer možemo uzeti četiri uzastopna broja među kojima je i onaj djeljiv brojem 5.)

Odavde slijedi i da je zbroj kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5 ako i samo ako tih brojeva ima 5*i*, gdje je *i* prirodan broj.

Odredimo sada najmanji prirodan broj k_2 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_2 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3. Najprije, neka je *m* = 3*l*, gdje je *l* prirodan broj. Tada je:

$m^2=9l^2=3\cdot 3l^2$,

$\left(m+1\right)^2=\left(3l+1\right)^2=9l^2+6l+1=3(3l^2+2l)+1$,

$\left(m+2\right)^2=\left(3l+2\right)^2=9l^2+12l+4=3(3l^2+4l+1)+1$.

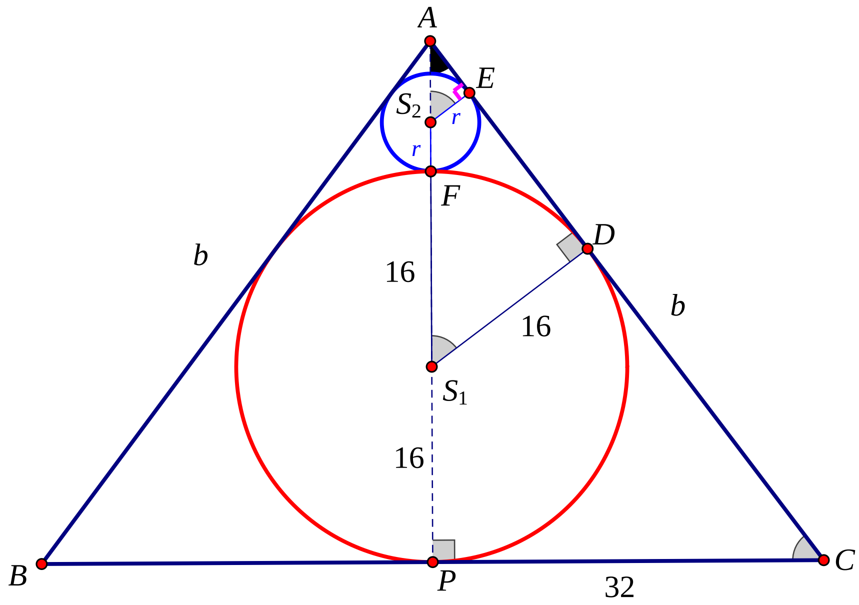
S obzirom da su ostaci kvadrata prirodnog broja pri dijeljenju brojem 3 redom 1, 1, 0, 1, 1, 0, itd., zbroj tri uzastopna kvadrata daje ostatak 2 pri dijeljenju brojem 3 pa iz navedenog slijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih 9 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3, (2)
a najmanji prirodan broj k_2 takav da vrijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih k_2 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3 je upravo $k_2=9$. (Očito je $k_2\neq 1$, jer možemo uzeti broj koji nije djeljiv brojem 3, $k_2\neq 4$, jer možemo uzeti dva broja djeljiva brojem 3, $k_2\neq 5$, jer možemo uzeti samo jedan broj djeljiv brojem 3, $k_2\neq 7,8$, jer možemo uzeti tri broja djeljiva brojem 3, a očito je $k_2\neq 2,3,6$, jer ni za koja dva, tri i šest kvadrata uzastopnih brojeva zbroj nije djeljiv brojem 3.)

Odavde slijedi i da je zbroj kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 3 ako i samo ako tih brojeva ima 9i, gdje je i prirodan broj.

Iz (1) i (2) slijedi da je zbroj kvadrata bilo kojih 45 uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 15. Budući da je 45 najmanji zajednički višekratnik brojeva 5 i 9, broj $k = 45$ je i traženi minimalni broj. Naime, za bilo koji broj $m < 45$, vrijedi da nije djeljiv ili brojem 5 ili brojem 9 pa, prema gore navedenom, ne može dijeliti zbroj kvadrata prvih m prirodnih brojeva.

Primjedba: Moguće ostatke kvadrata pri dijeljenju brojem 5, odnosno brojem 3, možemo ispitati i ovako:
$(5k\pm1)^2 = 25k^2 \pm 10n + 1$, $(5k\pm2)^2 = 25k^2 \pm 40n + 4$, odnosno $(3k\pm1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$.

4. Prvi način:



Uz oznake kao na slici neka je $|AP| = v$.
Trokuti ΔS_1DA i ΔS_2EA su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$16 : r = (v-16) : (v-r-2\cdot16)$$
$$16 : r = (v-16) : (v-r-32)$$
$$16(v-r-32) = r(v-16)$$
$$16v - 16r - 512 = rv - 16r$$
$$16v - rv = 512$$
$$v(16-r) = 512$$
$$v = \frac{512}{16-r}$$

Trokuti ΔS_1DA i ΔCPA su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$32 : 16 = b : (v-16)$$
$$2 : 1 = b : (v-16)$$
$$b = 2v - 32$$

Uvrštavanjem $v = \dfrac{512}{16-r}$ u prethodnu jednakost dobivamo:

$$b = 2 \cdot \frac{512}{16 - r} - 32$$

$$b = \frac{1024 - 32 \cdot 16 + 32r}{16 - r}$$

$$b = \frac{512 + 32r}{16 - r}$$

$$b = \frac{32(16 + r)}{16 - r}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔCPA dobivamo:

$$b^2 = v^2 + 32^2$$

$$\left[\frac{32(16+r)}{16-r}\right]^2 = \left(\frac{512}{16-r}\right)^2 + 32^2$$

$$32^2 \cdot \frac{(16+r)^2}{(16-r)^2} = \frac{512^2}{(16-r)^2} + 32^2 \quad / : 32^2$$

$$\frac{(16+r)^2}{(16-r)^2} = \frac{16^2}{(16-r)^2} + 1 \quad / \cdot (16-r)^2$$

$$(16+r)^2 = 256 + (16-r)^2$$

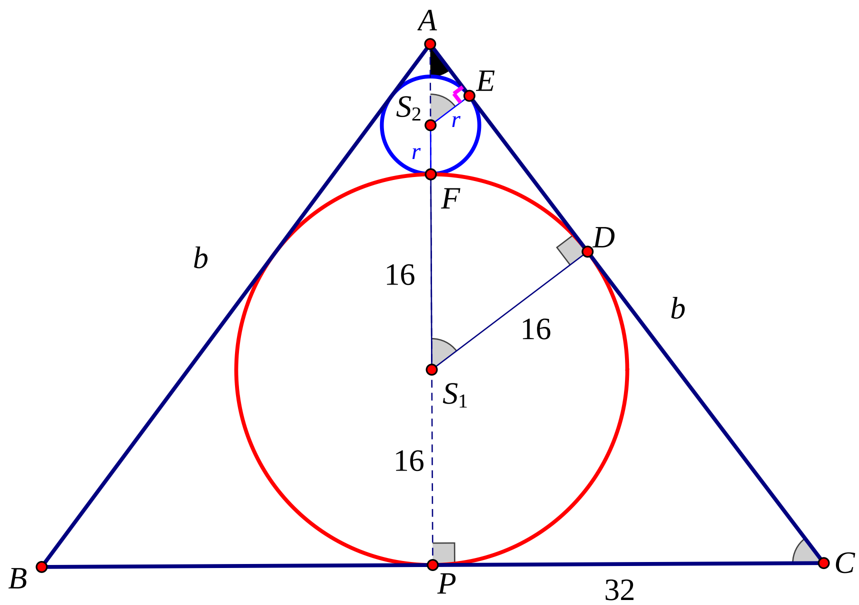
$$256 + 32r + r^2 = 256 + 256 - 32r + r^2$$

$64r = 256$

$r = 4$ cm

Duljina polumjera druge kružnice je 4 cm.

Drugi način:



Trokuti ΔS_1DA i ΔCPA su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$$32 : 16 = b : (v - 16)$$

$$2 : 1 = b : (v - 16)$$

$$b = 2v - 32$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔCPA dobivamo:

$b^2 = v^2 + 32^2$

Uvrštavanjem se dobije:

$(2v - 32)^2 = v^2 + 32^2$

$4v^2 - 128v + 32^2 = v^2 + 32^2$

$3v^2 = 128v$

$v = \frac{128}{3}$

Trokuti ΔS_1DA i ΔS_2EA su slični po KK poučku, pa vrijedi:

$16 : r = (v - 16) : (v - r - 2 \cdot 16)$

$16 : r = (v - 16) : (v - r - 32)$

$16(v - r - 32) = r(v - 16)$

$16v - 16r - 512 = rv - 16r$

$16v - rv = 512$

$v(16 - r) = 512$

$v = \frac{512}{16 - r}$

Izjednačavanjem se dobije:

$\frac{512}{16 - r} = \frac{128}{3}$

$128 \cdot (16 - r) = 512 \cdot 3$

$16 - r = 12$

$r = 4$

Duljina polumjera manje kružnice je 4 cm.

5. Od starta do cilja potrebno je 10 pomaka, od kojih je 7 pomaka desno i 3 gore. Ako se sa D označi pomak za jedan udesno, a sa G pomak za jedan prema gore, put od starta do cilja može se napisati kao uređena desetorka u kojoj je 7 D-ova i 3 G-a. Pitanje je koliko ima različitih desetorki s tim svojstvom.

Prvi način prebrojavanja:

Položaj prvog G može se izabrati na 10 načina, drugog G na preostalih 9 i trećeg G na preostalih 8 načina. To je ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načina. Međutim, kako nije važno koji je G izabran prvi, koji drugi, a koji treći, taj broj 720 treba podijeliti sa 6 jer je svaka moguća trojka ubrojena 6 puta $(3 \cdot 2 \cdot 1)$.

Dakle, do cilja je ukupno 120 puteva.

Drugi način prebrojavanja:

Deset različitih slova možemo poredati na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ načina. S obzirom da, u našem primjeru imamo deset slova od kojih je 7 D-ova i 3 G-a , svaka permutacija tih sedam istih slova D (kojih ima $7 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$) i tri ista slova G (kojih ima $3 \cdot 2 \cdot 1$) daje istu uređenu desetorku slova u kojoj je sedam slova D i tri slova G. Zato je ukupni broj putova jednak $\frac{10 \cdot 9 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.