

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
25. siječnja 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijedi:  $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 18$ . 1 BOD
- Zbroj svih pet podataka je  $a + b + c + d + e = 18 \cdot 5 = 90$ . 1 BOD
- Jedan je podatak 10, pa vrijedi  $a + b + c + d + 10 = 90$  1 BOD
- Tada je  $a + b + c + d = 90 - 10 = 80$ , 1 BOD
- odnosno:  $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{80}{4} = 20$ . 1 BOD
- Aritmetička sredina preostala četiri podatka iznosi 20. 1 BOD
- ..... UKUPNO 6 BODOVA

2. **Prvi način:** U pravokutnom trokutu jedan vanjski kut je pravi kut. Neka su  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  veličine preostalih dvaju vanjskih kutova tog trokuta.
- Zbroj veličina vanjskih kutova trokuta iznosi  $360^\circ$ , pa vrijedi:.
- $\alpha_1 + \beta_1 + 90^\circ = 360^\circ$ , odnosno  $\alpha_1 + \beta_1 = 270^\circ$ . 1 BOD
- Budući da je  $\alpha_1 : \beta_1 = 7 : 11$ , postoji racionalan broj  $k$  takav da je  $\alpha_1 = 7k$  i  $\beta_1 = 11k$ .
- Tada je  $7k + 11k = 270^\circ$  1 BOD
- $18k = 270^\circ$
- $k = 15^\circ$  1 BOD
- Tada je  $\alpha_1 = 7 \cdot 15 = 105^\circ$ . 1 BOD
- Onda je  $\alpha = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ , 1 BOD
- a kut  $\beta = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ . 1 BOD
- ..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:** Neka su  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  veličine vanjskih kutova pravokutnog trokuta koji nisu pravi kutovi, a  $\alpha$  i  $\beta$  njima odgovarajući unutarnji kutovi. Veličina vanjskog kuta trokuta jednak je zbroju veličina dvaju unutarnjih kutova kojima on nije susjedan.

Dakle,  $\alpha_1 = 90^\circ + \beta$  i  $\beta_1 = 90^\circ + \alpha$ , odnosno  $\beta = \alpha_1 - 90^\circ$  i  $\alpha = \beta_1 - 90^\circ$ .

Uvrštavanjem tih vrijednosti u jednakost  $\alpha + \beta = 90^\circ$  dobije se:

$$\beta_1 - 90^\circ + \alpha_1 - 90^\circ = 90^\circ, \text{ tj. } \alpha_1 + \beta_1 = 270^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

**Napomena:** Daljnji način rješavanja i bodovanja identičan je prvom načinu.

**Treći način:** Neka su  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  vanjski kutovi pravokutnog trokuta koji nisu pravi kutovi, a  $\alpha$  i  $\beta$  njima odgovarajući unutarnji kutovi.

Zbroj veličina unutarnjeg i njemu pripadnog vanjskog kuta iznosi  $180^\circ$ , pa vrijedi:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \text{ i } \beta + \beta_1 = 180^\circ, \text{ pa je}$$

$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 = 360^\circ.$$

Budući da je  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , dobiva se  $\alpha_1 + \beta_1 + 90^\circ = 360^\circ$ , pa je

$$\alpha_1 + \beta_1 = 270^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

**Napomena:** Daljnji način rješavanja i bodovanja identičan je prvom načinu.

**Četvrti način:** Zbroj veličina unutarnjeg i njemu pripadnog vanjskog kuta iznosi  $180^\circ$ , pa vrijedi:  
 $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$  i  $\beta + \beta_1 = 180^\circ$ , odnosno  $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$  i  $\beta_1 = 180^\circ - \beta$ .

Uvrštavanjem u uvjet zadatka  $\alpha_1 : \beta_1 = 7 : 11$ , dobiva se:

$$(180^\circ - \alpha) : (180^\circ - \beta) = 7 : 11 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$7 \cdot (180^\circ - \beta) = 11 \cdot (180^\circ - \alpha)$$

$$1260^\circ - 7\beta = 1980^\circ - 11\alpha \quad 1 \text{ BOD}$$

$$11\alpha - 7\beta = 720^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

Budući da je  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , vrijedi da je  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , pa je dalje:

$$11\alpha - 7 \cdot (90^\circ - \alpha) = 720^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

$$11\alpha - 630^\circ + 7\alpha = 720^\circ$$

$$18\alpha = 1350^\circ$$

$$\alpha = 75^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Onda je } \beta = 90^\circ - \alpha = 15^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

**3. Prvi način:** Vrijedi  $1^\circ = 60'$  i  $1' = 60''$  te je  $1^\circ = 60 \cdot 60'' = 3600''$ . 1 BOD

Navedeni središnji kut izrazi se (samo) u stupnjevima:

$$8^\circ 38' 24'' = \left(8 + \frac{38}{60} + \frac{24}{3600}\right)^\circ = \left(8 + \frac{19}{30} + \frac{1}{150}\right)^\circ = \left(8 + \frac{96}{150}\right)^\circ = \left(8 + \frac{32}{50}\right)^\circ = 8.64^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

Iz  $\frac{8.64^\circ}{360^\circ} = 0.024 = 2.4\%$  zaključuje se da veličina središnjeg kuta kružnog isječka

iznosi 2.4% punoga kuta. 1 BOD

Ako je  $x$  ukupan broj učenika škole, tada 2.4 % od  $x$  iznosi 15, pa je

$$x = 15 : 0.024 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 625$$

U školi je ukupno 625 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:** Vrijedi  $1^\circ = 60'$  i  $1' = 60''$  te je  $1^\circ = 60 \cdot 60'' = 3600''$ . 1 BOD

Navedeni središnji kut, kao i puni kut, izraze se u kutnim sekundama:

$$8^\circ 38' 24'' = 8 \cdot 3600'' + 38 \cdot 60'' + 24'' = 31\,104'' \quad 1 \text{ BOD}$$

$$360^\circ = 360 \cdot 3600'' = 1\,296\,000'' \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz } \frac{31\,104''}{1\,296\,000''} = 0.024 = 2.4\%$$

zaključuje se da veličina središnjeg kuta kružnog isječka iznosi 2.4% punoga kuta. 1 BOD

Ako je  $x$  ukupan broj učenika škole, tada 2.4% od  $x$  iznosi 15, pa je

$$x = 15 : 0.024 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 625$$

U školi je ukupno 625 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Treći način:** Vrijedi  $1^\circ = 60'$  i  $1' = 60''$  te je  $1^\circ = 60 \cdot 60'' = 3600''$ . 1 BOD

Navedeni središnji kut izrazi se (samo) u stupnjevima:

$$8^\circ 38' 24'' = \left(8 + \frac{38}{60} + \frac{24}{3600}\right)^\circ = \left(8 + \frac{19}{30} + \frac{1}{150}\right)^\circ = \left(8 + \frac{96}{150}\right)^\circ = \left(8 + \frac{32}{50}\right)^\circ = 8.64^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

Neka je  $x$  ukupan broj učenika u toj školi.

Broj učenika i pripadni središnji kut u kružnom dijagramu razmjerne su veličine te vrijedi:

$$15 : x = 8.64^\circ : 360^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

$$8.64^\circ \cdot x = 5400^\circ \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 625.$$

U školi ima 625 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Označimo događaj  $A = \{\text{zbroj brojeva u dva uzastopna bacanja je prost broj}\}$ .

S obzirom da svako bacanje kockice ima 6 ishoda, ukupno će biti  $6 \cdot 6 = 36$  ishoda. 1 BOD

Svi mogući ishodi mogu se napisati kao uređeni parovi kojima je prvi član broj dobiven u prvom bacanju, a drugi član broj dobiven u drugom bacanju kockice.

Povoljni su svi oni ishodi kod kojih je zbroj dvaju članova prost broj, a to su:

(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4),

(4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1) i (6, 5). 3 BODA

Povoljnih ishoda ima ukupno 15. 1 BOD

$$\text{Dakle, } P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0.41\bar{6} \approx 41.67\% \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena 1:** Nabranjanje povoljnih ishoda ne mora nužno biti u obliku uređenih parova (može primjerice u obliku  $1 + 1, \dots$ ). Za jedan izostavljeni povoljni ishod dati 2 BODA, za dva ili tri izostavljena 1 BOD, a za više od tri izostavljena 0 BODOVA. Dalje, pri određivanju vjerojatnosti događaja, slijediti pogrešku.

**Napomena 2:** Konačno rješenje se priznaje bez obzira na zapis (razlomak, decimalni broj ili postotak).

5. **Prvi način:** Neka Lovro ima  $x$  kuna. Cijena mobitela je  $x + 0.05x = 1.05x$ . 1 BOD

Snižena cijena mobitela iznosi  $0.95 \cdot 1.05x = 0.9975x$ . 1 BOD

Razlika  $x - 0.9975x = 0.0025x$  je 4 kune. 1 BOD

Lovrina ušteđevina iznosi  $x = 4 : 0.0025 = 1\ 600$  kn. 1 BOD

Cijena mobitela je bila 1680 kn, 1 BOD

a snižena je na 1596 kn. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:** Neka je  $x$  Lovrina ušteđevina, a  $y$  početna cijena mobitela.

Vrijedi  $y = x + 0.05x$ , tj.  $y = 1.05x$  1 BOD

Također je  $x - 0.95y = 4$  1 BOD

Uvrštavanjem u tu jednadžbu vrijednost  $y = 1.05x$  dobiva se:

$$x - 0.95 \cdot 1.05x = 4$$

$$x - 0.9975x = 4 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.0025x = 4$$

$$x = 1600 \quad 1 \text{ BOD}$$

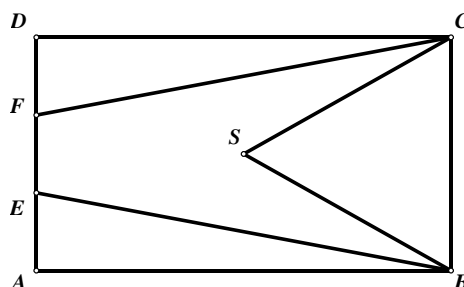
Početna cijena mobitela bila je  $y = 1.05 \cdot 1600 = 1680$  kn, 1 BOD

a cijena nakon sniženja je  $1600 - 4 = 1596$  kn. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Skica :

1 BOD



Označimo  $|AB| = |CD| = a$  i  $|BC| = |DA| = b$ .

Tada je  $|AE| = |EF| = |FD| = \frac{b}{3}$ .

1 BOD

$S$  je sjecište dijagonala, a dijagonale pravokutnika su jednake i raspolavljaju se u svom sjecištu. To znači da su jednakokračni trokuti  $DAS$  i  $BCS$  sukladni, pa imaju jednake visine na osnovicu.

U trokutu  $BCS$  visina na stranicu  $\overline{BC}$  ima duljinu  $\frac{a}{2}$ .

1 BOD

Tada je  $p_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$ .

1 BOD

Površina pravokutnog trokuta  $ABE$  jednaka je površini pravokutnog trokuta  $CDF$

1 BOD

i iznosi  $p_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{3} = \frac{ab}{6}$ .

1 BOD

Vrijedi:  $p_{EBSCF} = p_{ABCD} - (p_{ABE} + p_{CDF} + p_{BCS})$

1 BOD

$$p_{EBSCF} = ab - \left( \frac{ab}{6} + \frac{ab}{6} + \frac{ab}{4} \right) = \frac{12 - (2 + 2 + 3)}{12} \cdot ab = \frac{5}{12} \cdot ab$$

1 BOD

Dakle,  $p_{EBSCF} = \frac{5}{12} p_{ABCD}$ .

1 BOD

Traženi omjer površina je  $p_{EBSCF} : p_{ABCD} = 5 : 12$ .

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Ako učenik uzme neke konkretne vrijednosti za duljine stranica pravokutnika i tako dođe do točnog omjera, ali uz to ima provedene sve postupke i obrazložene sve odnose među duljinama dužina, takav postupak bodovati s 4 BODA.

7. **Prvi način:** U prvoj etapi, automobil je vozio 120 km brzinom od 90 km/h.

Za to mu je trebalo  $120 : 90 = \frac{4}{3}$  sata.

1 BOD

U drugoj etapi, automobil je vozio 1 sat i 15 minuta =  $\frac{5}{4}$  sata brzinom 64 km/h.

Prešao je  $\frac{5}{4} \cdot 64 = 80$  km.

1 BOD

U obje etape zajedno prešao je 200 km, a to je  $\frac{5}{6}$  cijeloga puta.

Cijeli put ima  $200 : \frac{5}{6} = 240$  km,

1 BOD

a od toga na treću etapu otpada  $240 - 200 = 40$  km.

1 BOD

Prosječna brzina će biti 80 km/h ako je ukupno vrijeme putovanja  $240 : 80 = 3$  sata. 2 BODA

Za prve dvije etape potrošio je  $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{31}{12} = 2\frac{7}{12}$  sata. 1 BOD

Treću etapu treba prijeći za  $3 - 2\frac{7}{12} = \frac{5}{12}$  sata. 1 BOD

Brzina u toj etapi treba biti  $40 : \frac{5}{12} = 96$  km/h. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** U prvoj etapi, automobil je vozio  $s_1 = 120$  km brzinom od  $v_1 = 90$  km/h.

Za to mu je trebalo  $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{120}{90} = \frac{4}{3}$  h. 1 BOD

U drugoj etapi, automobil je vozio  $t_2 = 1$  h 15 min =  $\frac{5}{4}$  h brzinom  $v_2 = 64$  km/h.

Prešao je  $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 64 \cdot \frac{5}{4} = 80$  km. 1 BOD

U obje etape zajedno prešao je  $s_1 + s_2 = 120 + 80 = 200$  km.

To je  $\frac{5}{6}$  cijeloga puta  $s$ , iz čega se dobije  $s = 200 : \frac{5}{6} = 240$  km. 1 BOD

Tada je  $s_3 = \frac{1}{6} \cdot 240 = 40$  km. 1 BOD

Ako je prosječna brzina na cijelom putu 80 km/h, onda vrijedi:

$\frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = 80$ , odnosno nakon uvrštavanja  $\frac{240}{\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + t_3} = 80$  1 BOD

$$240 = 80 \cdot \left( \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + t_3 \right)$$

$$240 = 80 \cdot \left( \frac{31}{12} + t_3 \right) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{31}{12} + t_3 = 3 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$t_3 = 3 - \frac{31}{12} = \frac{5}{12} \text{ h} \quad 1 \text{ BOD}$$

Konačno dobijemo prosječnu brzinu na posljednjoj šestini puta

$$v_3 = \frac{s_3}{t_3} = \frac{40}{\frac{5}{12}} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$v_3 = 96 \text{ km/h}$$

Preostalu šestinu puta automobil treba voziti brzinom od 96 km/h. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:** U prvoj etapi, automobil je vozio 120 km brzinom od 90 km/h

odnosno 1.5 km/min. Za to mu je trebalo  $120 : 1.5 = 80$  minuta. 1 BOD

U drugoj etapi, automobil je vozio 1 sat i 15 minuta = 75 minuta brzinom 64 km/h,

tj. odnosno  $\frac{16}{15}$  km/min te je prešao  $\frac{16}{15} \cdot 75 = 80$  km. 1 BOD

U obje etape zajedno prešao je 200 km, a to je  $\frac{5}{6}$  cijeloga puta.

To znači da je  $\frac{1}{6}$  duljine cijelog puta jednaka  $200 : 5 = 40$  km, 1 BOD

i to je duljina treće etape puta.

Duljina cijelog puta jednaka je  $40 \cdot 6 = 240$  km. 1 BOD

Prosječna brzina će biti 80 km/h ako je ukupno vrijeme putovanja

$240 : 80 = 3$  sata = 180 minuta. 2 BODA

Za prve dvije etape potrošio je  $80 + 75 = 155$  minuta. 1 BOD

Treću etapu treba prijeći za  $180 - 155 = 25$  minuta. 1 BOD

Brzina u toj etapi treba biti  $40 : 25 = 1.6$  km/min, tj.  $1.6 \cdot 60 = 96$  km/h. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA