ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

1. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

Zadatak A-1.1.

Matija 2018. godine navršava onoliko godina koliki je trostruki zbroj znamenaka godine njegovog rođenja. Isto vrijedi i za njegovog djeda. Koliko je godina djed navršio u godini Matijinog rođenja?

Bodovanje: Učenik treba dobiti 1 bod za točno postavljanje uvjeta iz zadatka za djeda ili unuka, 1 bod za konačno rješenje, te po 2 boda za rješavanje svake od dobivenih jednadžbi, pri čemu 1 bod nosi rješenje, a 1 bod argumentacija kojom se utvđuje da je učenik eliminirao sve druge mogućnosti (provjerio sve slučajeve).

Zadatak A-1.2.

Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i stranicama duljina $|AB| = 26$, $|BC| = 24$. U njega je upisana polukružnica s promjerom na stranici $\overline{BC}$ koji sadrži točku C. Polukružnica dira stranicu $\overline{AB}$. Koliki je polumjer upisane polukružnice?

Bodovanje: 1 bod nosi $|AC| = 10$ i 1 bod nosi točan rezultat. Glavna ideja rješenja nosi 4 boda.

U prvom rješenju 1 bod nosi zaključak $|AD| = |AC|$ i 1 bod obrazloženje tog zaključka, 1 bod primjena Pitagorinog poučka na trokut BDS, te 1 bod korištenje da je $|CS| = r$ i dobivanje jednadžbe u kojoj je jedina nepoznanica r.

U drugom rješenju 2 boda nosi uočavanje sličnosti, 1 bod zapisivanje omjera koji proizlazi iz te sličnosti, te 1 bod korištenje da je $|CS| = r$ i dobivanje jednadžbe u kojoj je nepoznanica r.

U trećem rješenju 1 bod nosi izražavanja površine trokuta ABC kao zbroja površina trokuta ASB i ASC, 1 bod korištenje da je $|CS| = |DS| = r$ u formuli za površinu, te 2 boda dobivanje jednadžbe s nepoznanicom r.

Zadatak A-1.3.

Kažemo da je prirodni broj N *zanimljiv* ako je djeljiv s 36 i ako postoji prirodni broj k manji od 10 takav da su $1, 2, \ldots, k$ u nekom poretku znamenke broja N u dekadskom zapisu. Odredi najmanji zanimljiv prirodni broj.

Bodovanje: 1 bod nosi zaključak o djeljivosti s 4 i 9, 1 bod nosi zaključak da $\frac{k(k+1)}{2}$ mora biti djeljivo s 9 te 1 bod nosi zaključak $k = 8$. Karakteriziranje djeljivosti s 4 vrijedi 1 bod, te određivanje zadnje dvije znamenke (bilo opisno bilo ispisivanjem svih mogućih kombinacija) nosi 1 bod. Točno rješenje nosi 1 bod.

Zadatak A-1.4.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x+y=x^2+y^2=x^3+y^3$.

Bodovanje: Ako učenik napiše sva rješenja, ali bez obrazloženja, dobiva 1 bod. Ako bez obrazloženja napiše manje od četiri rješenja, dobiva 0 bodova.

Ako učenik ne napiše da se provjerom vidi da dobiveni parovi zaista jesu rješenja, treba dobiti najviše 5 bodova.

U prvom rješenju, ispravno raspisivanje izraza x^3+y^3 i uvrštavanje u početnu jednakost nosi 1 bod. Svođenje na jednadžbu $(x+y)(x-1)(1-y)=0$ iz koje slijede 3 slučaja nosi 2 boda. Svaki raspisani slučaj nosi po 1 bod.

U drugom rješenju ispravno raspisivanje izraza x^3+y^3 i xy te dobivanje jednadžbe za z nosi 2 boda. Svođenje na jednadžbu $z(z-1)(z-2)=0$ iz koje slijede tri slučaja nosi 1 bod. Svaki raspisani slučaj nosi po 1 bod.

Zadatak A-1.5.

Na koliko se načina može u svako polje tablice 2018×2018 upisati po jedan prirodni broj tako da zbroj brojeva u bilo koja tri uzastopna polja u istom retku ili stupcu bude 5?

Bodovanje: Uočavanje da iz bilo koja dva uzastopna polja možemo jednoznačno odrediti cijeli redak/stupac vrijedi 1 bod. 2 boda nosi zaključak da je dovoljno promatrati sve moguće ispune 3×3 bloka. Prebrojavanje svih mogućih ispravnih 3×3 ispuna nosi 3 boda

Zadatak A-1.6.

U trokutu ABC mjera kuta $\sphericalangle ABC$ je $120°$, te vrijedi $|AB|=6$ i $|BC|=9$. Neka su točke P i Q na stranici $\overline{AC}$ takve da je trokut BPQ jednakostraničan. Odredi $|PQ|$.

Bodovanje: Učenikovo rješenje treba bodovati isključivo prema jednoj bodovnoj shemi, onoj po kojoj ostvaruje veći broj bodova.

U prvom rješenju 1 bod se dodjeljuje za uočavanje sličnosti trokuta ABC i jednog od trokuta BCQ i APB na temelju jednakih kutova, a još 2 boda se dodjeljuje za isticanje sličnosti svih triju trokuta, tj. sličnosti trokuta BCQ i APB. Po 2 boda se dodjeljuje za zapisivanje potrebnih omjera za svaki od ta dva para. Nakon toga 1 bod se dodjeljuje za izražavanje duljina y i z preko x, 1 bod za postavljanje jednadžbe sa samo jednom nepoznanicom, te 1 bod za točno rješenje.

U drugom rješenju 1 bod se dodjeljuje za crtanje točke D, te po 1 bod za $|DB|$ i $|AD|$ (nije nužno korištenje Pitagorinog poučka za visinu jednakostraničnog trokuta). Nadalje, 1 bod se dodjeljuje za računanje $|AC|$. Uvođenje točke N i povezivanje visine $|BN|$ sa stranicom $|PQ|$ nosi 1 bod. Ideja da se duljina visine $|BN|$ može izračunati koristeći površinu nosi 2 boda, a sam račun 1 bod. Konačno rješenje nosi 1 bod.

Konačno rješenje se priznaje u bilo kojem ekvivalentnom obliku, npr. $\frac{54}{\sqrt{171}}$ ili $\frac{18\sqrt{19}}{19}$.

Zadatak A-1.7.

Marin raspoređuje brojeve 1, 2, …, 8 u vrhove kocke, a zatim svakom bridu pridružuje zbroj brojeva u vrhovima koje taj brid spaja. Može li Marin postići da svi brojevi pridruženi bridovima budu međusobno različiti?

Bodovanje: Zaključak da postoji 13 mogućih različitih zbrojeva nosi 1 bod. Elimeniranje dva od tih zbrojeva nosi 4 boda po zbroju. Konačno, zaključak da mogućih zbrojeva ima najviše 11, a da je potrebno 12 različitih zbrojeva te da zbog toga raspored nije moguć nosi 1 bod.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

2. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\operatorname{Re}(z) = 9 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z^3).$$

Bodovanje: 1 bod nosi uvođenje oblika $z = 9 + yi$. Po 1 bod nose točno izračunati izrazi z^2 i z^3. 1 bod treba dodijeliti za ispravno zapisanu jednadžbu dobivenu iz uvjeta $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z^3)$. Rješenje do kojeg vodi slučaj $y = 0$ nosi 1 bod. Ako učenik zaboravi da $y^2 = 225$ ima dva rješenja te zapiše samo $y = 15$, treba mu dodijeliti najviše 5 bodova.

Zadatak A-2.2.

Dan je pravokutnik $ABCD$. Između pravaca AB i CD, paralelno s njima, nacrtan je određeni broj crvenih pravaca, a između pravaca AD i BC, paralelno s njima, određeni broj plavih pravaca. Time je pravokutnik podijeljen na 775 malih pravokutnika, a crveni i plavi pravci međusobno se sijeku u 720 točaka. Koliko ima crvenih, a koliko plavih pravaca?

Bodovanje: Po 1 bod nosi zapisivanje broja sjecišta i broja malih pravokutnika koristeći broj crvenih i plavih pravaca. 2 boda nosi računanje ukupnog broja crvenih i plavih pravaca zajedno, 1 bod nosi strategija za dobivanje brojeva c i p, te 1 bod konačno rješenje.

Zadatak A-2.3.

Odredi sve trojke prostih brojeva (p, q, r) za koje vrijedi

$$p^q = r - 1.$$

Bodovanje: 1 bod nosi zaključak da r nije 2, te još 2 boda da je $p = 2$. 1 bod nosi slučaj $q = 2$, a 3 boda nosi eliminacija slučaja $q > 2$.

Zapisano rješenje $(2, 2, 5)$ nosi 1 bod čak i ako nije argumentirano.

Zadatak A-2.4.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 4y^2 &= -1, \\ 4x^2 + xy - 11y^2 &= -2. \end{aligned}$$

Bodovanje: 2 boda nosi dobivanje jednadžbe kojoj je desna strana 0 (pri čemu se lijeva strana može faktorizirati) ili 1 (pri čemu je lijeva strana potpun kvadrat), te 1 bod sređivanje lijeve strane. 1 bod nosi razlikovanje slučajeva, te po 1 bod svaki od dva slučaja.

Zadatak A-2.5.

Dan je trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, takav da je trokut ABC šiljastokutan. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC, a točka E sjecište pravaca OB i CD. Ako je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CEB + 10°$, odredi veličinu kuta između dijagonala trapeza $ABCD$.

Bodovanje: Moguća su i točna rješenja u kojima se argumentirano dolazi do odgovora 100°, npr. promatranjem kuta $\sphericalangle ASB$. Iako se kut između dva pravca definira kao manji od dva moguća kuta, ovakva rješenja (ako je argumentacija potpuna) treba bodovati sa svih 6 bodova.

3 boda nosi uočavanje veze između kutova $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle AOB$ kao središnjeg i obodnog kuta nad tetivom AB. Konstatacija da su kutovi $\sphericalangle CEB$ i $\sphericalangle OBA$ sukladni nosi 1 bod. Izražavanje kuta $\sphericalangle AOB$ preko α nosi 1 bod, čak i ako rješenje nije potpuno pa se središnji i obodni kut ne spominju. Točan konačni rezultat nosi 1 bod.

Zadatak A-2.6.

U trokutu ABC vrijedi $|AC| = 2$, $|BC| = 1$, a kut pri vrhu C je pravi. Kvadrat je smješten unutar tog trokuta tako da mu dva vrha leže na dužini $\overline{AC}$, treći na stranici $\overline{AB}$, a četvrti na kružnici polumjera 1 sa središtem u točki B. Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

Bodovanje: Umjesto trokuta ABC i FBH može se promatrati i neki drugi par sličnih trokuta, npr. FBH i AFE ili AFE i ABC. Uočavanje bilo koje od ovih sličnosti nosi 1 bod, a 1 bod donosi ispravno postavljanje omjera dobivenog iz ove sličnosti. U nastavku rješenja potrebno je dvije veličine dovesti u odnos koristeći omjer sličnosti, te koristeći Pitagorin poučak. 2 boda nosi izražavanje odnosa tih veličina iz omjera, a 2 boda nosi primjena Pitagorinog poučka koristeći iste veličine. 2 boda nosi spajanje dvije dobivene jednadžbe u jednu kvadratnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Rješavanje jednadžbe nosi 1 bod. Eliminacija rješenja $x = 1$ nosi još 1 bod.

Zadatak A-2.7.

Retci tablice 50×50 označeni su brojevima $a_1, \ldots, a_{50}$, a stupci brojevima $b_1, \ldots, b_{50}$. Tih 100 brojeva je međusobno različito i među njima je točno 50 racionalnih brojeva. Tablica je popunjena tako da je za $i, j = 1, 2, \ldots, 50$, u polje (i, j) upisan broj $a_i + b_j$. Odredi najveći mogući broj racionalnih brojeva upisanih u polja tablice.

Bodovanje: Točan odgovor bez objašnjenja nosi 1 bod. Rješenje koje sadrži samo primjer u kojem se postiže 1250 racionalnih brojeva nosi najviše 4 boda. Rješenje u kojem je pokazano da vrijedi $N \leqslant 1250$, ali ne sadrži primjer u kojem se ovaj broj doista postiže nosi najviše 6 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

3. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

Zadatak A-3.1.

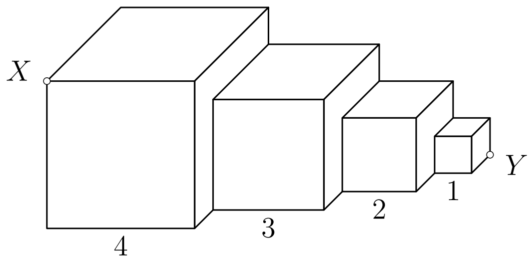
Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$1 \leqslant \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \leqslant 3.$$

Bodovanje: 1 bod nosi sređivanje nejednakosti na oblik iz kojeg možemo direktno čitati rješenja, po 1 bod nose uvjeti koje dobivamo iz svake od dvije nejednakosti na $\sin x$, 1 bod nosi zapisivanje presjeka uvjeta, te konačno 2 boda nosi korektno zapisivanje rješenja.

Zadatak A-3.2.

Četiri kocke duljina bridova 1, 2, 3 i 4 nalaze se jedna do druge kao na slici. Odredi duljinu dijela dužine $\overline{XY}$ koji se nalazi unutar kocke brida duljine 3.



Bodovanje: Izračun $|XY|$ nosi 2 boda. Obrazloženje da XY siječe kocku brida 3 u lijevoj i desnoj strani kocke nosi 1 bod. Zaključak da je traženi dio $\frac{3}{10}|XY|$ nosi 1 bod, a obrazloženje nosi još 1 bod. Konačan rezultat nosi 1 bod.

Zadatak A-3.3.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$(x-1009)^3+(2x-1009)^3+(2018-3x)^3=0.$$

Bodovanje: 1 bod nosi uočavanje da je zbroj prve dvije zagrade jednak trećoj, a 2 boda jednostavniji zapis jednadžbe pomoću toga. Faktorizacija nosi 1 bod, a 1 bod zaključak da je neki od faktora jednak 0. Sva točna rješenja zajedno nose 1 bod.

Zadatak A-3.4.

Na koliko se načina sva slova $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I$ mogu poredati tako da su i samoglasnici i suglasnici poredani abecednim redom?

Bodovanje: 2 boda nosi primjećivanje da odabir mjesta za samoglasnike potpuno određuje poredak. U daljnjem brojanju, 1 bod nosi prebrojavanje koje ne uzima u obzir permutacije $(9 \cdot 8 \cdot 7)$, 2 boda nosi broj (6) permutacija, a 1 bod dijeljenje s tim brojem. Slično, ako učenik pogriješi samo u računu, treba oduzeti 1 bod.

Zadatak A-3.5.

Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodan broj m takav da je broj

$$p^m + 4$$

kvadrat prirodnog broja.

Bodovanje: Početna faktorizacija nosi 1 bod, a primjena teorema o kanonskom rastavu na proste faktore nosi 1 bod. Oduzimanje dobivenih jednakosti i zaključak koji slijedi nosi 2 boda, a ispravno raspisivanje dobivenih slučajeva nosi po 1 bod.

Zadatak A-3.6.

Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Odredi najmanju veličinu kuta $\sphericalangle BAC$ za koju je moguće da vrijedi $|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$.

Bodovanje: Da bi se potpuno riješio zadatak, nužno je pokazati da se jednakost može postići za vrijednost $60°$. Taj dio rješenja nosi 2 boda.

Tvrdnja da je $\cos \sphericalangle BAC \leqslant \frac{1}{2}$, odnosno da je $\alpha \geqslant 60°$, nosi 2 boda. Dokaz te tvrdnje nosi 6 bodova, od čega 4 boda za izražavanje $\cos \sphericalangle BAC$ preko $|AB|$ i $|AC|$. Dokaz da je $\frac{bc}{b^2+c^2} \leqslant \frac{1}{2}$ učenici mogu napraviti na više načina, npr. koristeći A–G nejednakost, a svaki ispravan dokaz nosi 2 boda.

Primjena trigonometrije na različite pravokutne trokute, bez daljnjih zaključaka, nosi najviše 1 bod.

Zadatak A-3.7.

Zgrada uz prizemlje ima još 100 katova. Dizalo u toj zgradi ima samo dvije tipke A i B. Pritiskom na tipku A dizalo se penje za 7 katova, a pritiskom na tipku B dizalo se spušta za 9 katova. Je li moguće takvim dizalom doći sa svakog kata na bilo koji drugi?

Bodovanje: Točan odgovor ne nosi bodove.

Početni zaključak da je dovoljno dokazati da se uvijek može popeti jedan kat iznad i jedan kat ispod nosi 2 boda.

Određivanje načina na koji se, u pravilu, može popeti kat iznad nosi 2 boda. Obraćanje pažnje na poredak kojim se pritišću tipke, kako bi se ostalo unutar 100 katova koje zgrada ima, nosi po 2 boda. Određivanje načina na koji se može popeti kat ispod nosi 2 boda. Obraćanje pažnje na poredak kojim se pritišću tipke ponovno nosi još 2 boda.

Ako učenik jednom rečenicom pokaže da je svjestan da treba paziti na poredak pritisaka, npr.

"kako poredak pritisaka na tipke možemo permutirati, bez obzira na to na kojem se katu nalazimo, uvijek ćemo moći doći i kat iznad i kat ispod", također treba dobiti 4 boda.

U drugom rješenju 2 boda nosi zaključak da je dovoljno dokazati da se može doći između katova iste parnosti. 2 boda nosi dokazana tvrdnja da se uvijek moguće spustiti dva kata niže. Po 2 boda nosi rješavanje svakog od podslučajeva kada su i i j iste parnosti: $i > j$, $i < j \leqslant 86$ te $i < j, j > 86$.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

4. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

Zadatak A-4.1.

Odredi zadnje dvije znamenke broja $(1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (2018!)^2$.

Bodovanje: 1 bod nosi zaključak da su zadnje dvije znamenke ostatak pri dijeljenju sa 100, 2 boda da je $(n!)^2$ djeljivo sa 100 za $n \geqslant 5$, 2 boda da zato promatramo samo zbroj prva četiri pribrojnika i 1 bod točan rezultat. Točan rezultat bez objašnjenja nosi 1 bod. Točno rješenje u kojem se ne spominje dijeljenje sa 100, već se samo promatraju zadnje dvije znamenke, treba bodovati sa 6 bodova.

Zadatak A-4.2.

Neka je z kompleksan broj takav da je $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Odredi modul i argument broja z.

Argument kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je broj $\arg z = \varphi$.

Bodovanje: 2 boda nosi zaključak da je $z^3 \neq 1$ i uočavanje faktorizacije $z^9 - 1 = (z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1)$, 2 boda izračun točnih opcija za φ i 1 bod primjena danog uvjeta na φ te dobivanje konačnog rješenja.

Ako učenik ne isključi opcije $k = 3$ i $k = 6$, tj. ne koristi uvjet $z^3 \neq 1$ i tako dobije više rješenja, treba mu dodijeliti najviše 5 bodova.

Zadatak A-4.3.

Dokaži da je $2^{2^{n+2}} + 4$ višekratnik broja 10 za svaki prirodni broj n.

Bodovanje: Učenik može zapisati rješenje i koristeći kongruencije. Ako učenik koristi periodičnost (koju ne treba dokazivati) ostataka potencija, onda 3 boda nosi uočavanje perioda duljine 4 pri dijeljenju potencija broja 2 s 10, 2 boda nosi činjenica da je eksponent djeljiv s 4 i da je zato ostatak broja $2^{2^{n+2}}$ pri dijeljenju s 10 jednak 6, te 1 bod konačan zaključak (tj. da je $6 + 4 = 10$, što je djeljivo s 10).

Ako se koristi indukcija, 1 bod nosi zaključak da $2^{2^{n+2}}$ mora biti oblika $10k + 6$ ili da treba dokazati $2^{2^{n+2}} + 4 \equiv 0 \pmod{10}$ ili neki sličan zapis koji se može koristiti u nastavku rješenja. Provjera baze indukcije nosi 1 bod, uočavanje da je $2^{2^{(n+1)+2}} = 2^{2 \cdot 2^{n+2}} = \left(2^{2^{n+2}}\right)^2$ nosi 2 boda, kvadriranje nosi 1 bod i zaključak još 1 bod.

Zadatak A-4.4.

U kutiji se nalazi n kuglica, od kojih su neke bijele, a neke crne. Odredi n ako je vjerojatnost da izvlačenjem dviju kuglica izvučemo jednu bijelu i jednu crnu jednaka $\frac{1}{2}$ i poznato je da kuglica jedne boje ima za 2018 više nego kuglica druge boje.

Bodovanje: Uvođenje notacije za broj bijelih i crnih kuglica (u ponuđenom rješenju varijable b i c) i uočavanje poznate ($|b-c|=2018$) i nepoznate ($n=b+c$) veličine nosi 1 bod. Točno prebrojavanje povoljnih ishoda nosi 1 bod i svih mogućih ishoda nosi 1 bod. Izjednačavanje vjerojatnosti zapisane varijablama b i c s poznatom veličinom $\frac{1}{2}$ nosi 1 bod. Konačno sređivanje i uočavanje veze između veličina $n=b+c$ i $|b-c|=2018$ nosi 2 boda.

Zadatak A-4.5.

Odredi geometrijsko mjesto (skup) središta svih kružnica koje izvana diraju kružnicu s jednadžbom $x^2+y^2-4y+3=0$, a os x im je tangenta.

Bodovanje: U oba ponuđena rješenja, sređivanje jednadžbe kružnice k i uočavanje njenog središta i polumjera nosi 1 bod.

U prvom rješenju: zaključak da je središte S kružnice k' jednako udaljeno od osi x i kružnice k nosi 1 bod, zaključak da to zapravo znači da je S jednako udaljena od pravca $x=-1$ i točke $(0,2)$ još 2 boda te konačni zaključak da je to parabola s određenim žarištem i ravnalicom 2 boda.

U drugom rješenju: zaključak da je nužno $q>0$ nosi 1 bod, činjenica da je q polumjer kružnice k' nosi 1 bod, zapis uvjeta o tangencijalnosti i dodiru s kružnicom adekvatnom jednadžbom nosi 2 boda, a konačno sređivanje jednadžbe nosi 1 bod. Ako učenik ne istakne da je $q>0$, a koristi to, treba mu dodijeliti najviše 5 bodova.

Zadatak A-4.6.

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{41}$ aritmetički niz takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{40}}+\sqrt{a_{41}}}$$

prirodni broj. Ako je $a_1=1$, a razlika niza prirodni broj, odredi razliku niza.

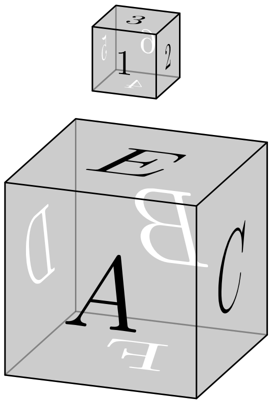
Bodovanje: Racionalizacija razlomaka u danom zbroju nosi 3 boda, 1 bod nosi zbrajanje, a još 1 bod zapis zbroja pomoću tražene varijable d (razlike niza) i činjenice da je $a_1=1$. Taj dio je zajednički u oba ponuđena rješenja.

Nadalje, u prvom rješenju zaključak da je $\sqrt{40d+1}=k$ prirodni broj nosi 1 bod, a daljnja 2 boda nosi zaključak da su $\frac{k^2-1}{40}$ i $\frac{40}{k+1}$ prirodni brojevi. 2 boda nosi izračun mogućnosti za broj k, a zadnji 1 bod nosi izračunavanje mogućih razlika niza.

U drugom rješenju nastavljamo tako da dobiveni izraz kvadriramo i pogodno sredimo, što nosi 2 boda, određivanje mogućih opcija za n nosi 2 boda. Učenik može jednostavno uvrštavati različite vrijednosti za n dok ne dobije da je $40-2n<n^2$ i konstatira da će isto vrijediti za sve veće n, za što također treba dobiti 2 boda. Konačni 1 bod nosi uvrštavanje mogućnosti za n i pronalazak svih mogućih razlika niza.

Zadatak A-4.7.

Dano je 27 identičnih standardnih igraćih kockica $1 \times 1 \times 1$ s brojevima 1 do 6, kao na gornjoj slici (nasuprot 1 je 6, nasuprot 2 je 5 i nasuprot 3 je 4).



Od njih je sastavljena kocka $3 \times 3 \times 3$ tako da se kockice uvijek diraju stranama na kojima je isti broj. Promatramo zbrojeve brojeva napisanih na stranama velike kocke. Ti zbrojevi su označeni slovima A, B, C, D, E, F, kao na donjoj slici (parovi na suprotnim stranama su A i B, C i D te E i F).

Ako je $A = 9$ i $C = 36$, odredi B, D, E i F.

Bodovanje: 1 bod nosi zaključak o brojevima na suprotnim mjestima velike kocke, a 1 bod zaključak da je zbroj brojeva na suprotnim stranama kocke 63 (tj. izračun brojeva B i D). 1 bod nosi zaključak da su na prednjoj strani svi brojevi jednaki 1. Raspisivanje svih slučajeva za prvi stupac desne strane nosi 3 boda, od kojih se 1 bod može dodijeliti ako se uoči barem jedan, ali ne svi slučajevi. 1 bod nosi zaključak da je zbroj 36 moguć samo ako je zbroj u svakom stupcu 12, a 2 boda nosi zaključak o točnom rasporedu brojeva koji daju zbrojeve C i E. Računanje brojeva E i F nosi 1 bod.