

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Matija 2018. godine navršava onoliko godina koliki je trostruki zbroj znamenaka godine njegovog rođenja. Isto vrijedi i za njegovog djeda. Koliko je godina djed navršio u godini Matijinog rođenja?
2. Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i stranicama duljina $|AB| = 26$, $|BC| = 24$. U njega je upisana polukružnica s promjerom na stranici \overline{BC} koji sadrži točku C . Polukružnica dira stranicu \overline{AB} . Koliki je polumjer upisane polukružnice?
3. Kažemo da je prirodni broj N *zanimljiv* ako je djeljiv s 36 i ako postoji prirodni broj k manji od 10 takav da su $1, 2, \dots, k$ u nekom poretku znamenke broja N u dekadskom zapisu. Odredi najmanji zanimljiv prirodni broj.
4. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$.
5. Na koliko se načina može u svako polje tablice 2018×2018 upisati po jedan prirodni broj tako da zbroj brojeva u bilo koja tri uzastopna polja u istom retku ili stupcu bude 5?

* * *

6. U trokutu ABC mjera kuta $\sphericalangle ABC$ je 120° , te vrijedi $|AB| = 6$ i $|BC| = 9$. Neka su točke P i Q na stranici \overline{AC} takve da je trokut BPQ jednakostraničan. Odredi $|PQ|$.
7. Marin raspoređuje brojeve $1, 2, \dots, 8$ u vrhove kocke, a zatim svakom bridu pridružuje zbroj brojeva u vrhovima koje taj brid spaja. Može li Marin postići da svi brojevi pridruženi bridovima budu međusobno različiti?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\operatorname{Re}(z) = 9 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z^3).$$

2. Dan je pravokutnik $ABCD$. Između pravaca AB i CD , paralelno s njima, nacrtan je određeni broj crvenih pravaca, a između pravaca AD i BC , paralelno s njima, određeni broj plavih pravaca. Time je pravokutnik podijeljen na 775 malih pravokutnika, a crveni i plavi pravci međusobno se sijeku u 720 točaka. Koliko ima crvenih, a koliko plavih pravaca?

3. Odredi sve trojke prostih brojeva (p, q, r) za koje vrijedi

$$p^q = r - 1.$$

4. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$\begin{aligned}x^2 + xy - 4y^2 &= -1, \\4x^2 + xy - 11y^2 &= -2.\end{aligned}$$

5. Dan je trapez $ABCD$ s osnovicama \overline{AB} i \overline{CD} , takav da je trokut ABC šiljastokutan. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC , a točka E sjecište pravaca OB i CD . Ako je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CEB + 10^\circ$, odredi veličinu kuta između dijagonala trapeza $ABCD$.

* * *

6. U trokutu ABC vrijedi $|AC| = 2$, $|BC| = 1$, a kut pri vrhu C je pravi. Kvadrat je smješten unutar tog trokuta tako da mu dva vrha leže na dužini \overline{AC} , treći na stranici \overline{AB} , a četvrti na kružnici polumjera 1 sa središtem u točki B . Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

7. Retci tablice 50×50 označeni su brojevima a_1, \dots, a_{50} , a stupci brojevima b_1, \dots, b_{50} . Tih 100 brojeva je međusobno različito i među njima je točno 50 racionalnih brojeva. Tablica je popunjena tako da je za $i, j = 1, 2, \dots, 50$, u polje (i, j) upisan broj $a_i + b_j$. Odredi najveći mogući broj racionalnih brojeva upisanih u polja tablice.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

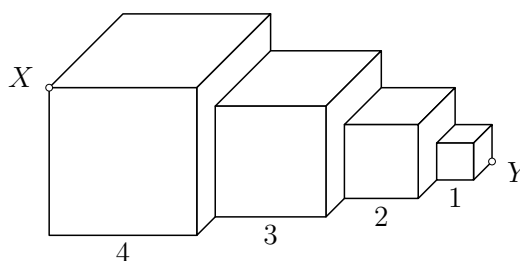
3. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$1 \leq \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \leq 3.$$

2. Četiri kocke duljina bridova 1, 2, 3 i 4 nalaze se jedna do druge kao na slici. Odredi duljinu dijela dužine \overline{XY} koji se nalazi unutar kocke brida duljine 3.



3. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$(x - 1009)^3 + (2x - 1009)^3 + (2018 - 3x)^3 = 0.$$

4. Na koliko se načina sva slova $A B C D E F G H I$ mogu poredati tako da su i samoglasnici i suglasnici poredani abecednim redom?
5. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodan broj m takav da je broj

$$p^m + 4$$

kvadrat prirodnog broja.

* * *

6. Neka su \overline{BD} i \overline{CE} visine šiljastokutnog trokuta ABC . Odredi najmanju veličinu kuta $\sphericalangle BAC$ za koju je moguće da vrijedi $|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$.
7. Zgrada uz prizemlje ima još 100 katova. Dizalo u toj zgradi ima samo dvije tipke A i B . Pritiskom na tipku A dizalo se penje za 7 katova, a pritiskom na tipku B dizalo se spušta za 9 katova. Je li moguće takvim dizalom doći sa svakog kata na bilo koji drugi?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

25. siječnja 2018.

1. Odredi zadnje dvije znamenke broja $(1!)^2 + (2!)^2 + \dots + (2018!)^2$.
2. Neka je z kompleksan broj takav da je $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ i $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Odredi modul i argument broja z .
Argument kompleksnog broja $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ je broj $\arg z = \varphi$.
3. Dokaži da je $2^{2^{n+2}} + 4$ višekratnik broja 10 za svaki prirodni broj n .
4. U kutiji se nalazi n kuglica, od kojih su neke bijele, a neke crne. Odredi n ako je vjerojatnost da izvlačenjem dviju kuglica izvučemo jednu bijelu i jednu crnu jednaka $\frac{1}{2}$ i poznato je da kuglica jedne boje ima za 2018 više nego kuglica druge boje.
5. Odredi geometrijsko mjesto (skup) središta svih kružnica koje izvane diraju kružnicu s jednadžbom $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, a os x im je tangenta.

* * *

6. Neka je a_1, a_2, \dots, a_{41} aritmetički niz takav da je

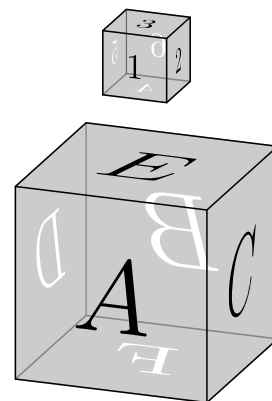
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$$

prirodni broj. Ako je $a_1 = 1$, a razlika niza prirodni broj, odredi razliku niza.

7. Dano je 27 identičnih standardnih igračih kockica $1 \times 1 \times 1$ s brojevima 1 do 6, kao na gornjoj slici (nasuprot 1 je 6, nasuprot 2 je 5 i nasuprot 3 je 4).

Od njih je sastavljena kocka $3 \times 3 \times 3$ tako da se kockice uvijek diraju stranama na kojima je isti broj. Promatramo zbrojeve brojeva napisanih na stranama velike kocke. Ti zbrojevi su označeni slovima A, B, C, D, E, F , kao na donjoj slici (parovi na suprotnim stranama su A i B , C i D te E i F).

Ako je $A = 9$ i $C = 36$, odredi B, D, E i F .



Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.