ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

Zadatak A-1.1.

Marko je nacrtao pravokutnik s dvije plave stranice duljine 24 i dvije crvene stranice dulijne 36. Svaku točku unutar pravokutnika je obojio bojom stranice koja je najbliža toj točki. Točke koje su jednako udaljene od plave i crvene stranice je obojio crno. Odredi površinu crvenog dijela pravokutnika.

Bodovanje: 5 bodova nosi određivanje crvenog i plavog dijela pravokutnika, pri čemu je dovoljno da učenik podjelu opiše crtežom uz spominjanje simetrala kutova (ili kutova od 45°). Račun površina nosi 5 bodova, od kojih je 1 bod za ideju s oduzimanjem površina ili duljina koje je lakše izračunati, 1 bod za formulu za površinu trapeza ili pravokutnog trokuta, 2 boda za povezivanje elemenata u formuli sa zadanim elementima, te 1 bod za ispravno rješenje (u bilo kojem obliku poput $36 \cdot 24 - 2 \cdot 144$, 24^2, 576 i sl.).

Zadatak A-1.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takve da je

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10.$$

Bodovanje: U prvom rješenju nadopunjavanje do potpunih kvadrata nosi 4 boda, faktorizacija s konstantnom jednom stranom jednakosti 2 boda, a zapisivanje i rješavanje svakog od četiri sustava po 1 bod.

U drugom rješenju nadopunjavanje lijeve strane do potpunog kvadrata nosi 2 boda. Smještanje desne strane između dva kvadrata za pozitivne m nosi 2 boda, te uočavanje iznimke $m = 1$ još 1 bod. Određivanje rješenja za $m = 1$, nosi 1 bod. Smještanje desne strane između kvadrata za negativne m nosi 2 boda, te uočavanje iznimke $m = -2$ još 1 bod. Određivanje rješenja za $m = -2$, nosi 1 bod.

U trećem rješenju faktorizacija nosi 1 bod, a čitanje svih rješenja nosi 1 bod. Komentar o različitim predznacima strana nosi 1 bod. Prvi od dva slučaja (koji god učenik napiše) nosi 4 boda, a drugi 3 boda.

Pogađanje svih rješenja nosi 1 bod.

Zadatak A-1.3.

Neka su a, b i c različiti pozitivni realni brojevi takvi da je $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \neq 0$. Dokaži da barem jedan od brojeva

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{b+c}{b+c-a}, \quad \frac{c+a}{c+a-b}$$

pripada intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu.

Bodovanje: Prelazak na interval $\left\langle\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ nosi 2 boda, a na interval $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ još 1 bod. Komentar da su brojevi pozitivni nosi 1 bod.

U prvom rješenju, dokaz da je barem jedan broj manji od $\frac{1}{2}$ nosi 4 boda, a da je barem jedan veći ili jednak $\frac{1}{2}$ nosi 2 boda.

U drugom rješenju ideja da se uvede uređaj među brojeve a, b i c nosi 4 boda, a zaključci koji broj je manji, odnosno veći od $\frac{1}{2}$ po 1 bod.

Zadatak A-1.4.

Neka je D nožište visine iz vrha C jednakokračnog trokuta ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Točka M je polovište dužine $\overline{CD}$. Pravci BM i AC sijeku se u točki E.

Odredi omjer $|CE| : |AC|$.

Bodovanje: U prvom rješenju bodujemo uvođenje točke F, isticanje da je $\overline{FM}$ srednjica trokuta ADC (2 boda), da je $|FM| : |AB| = 1 : 4$, da trokuti FME i ABE imaju jednake kutove, da je $|FE| : |AE| = 1 : 4$ (2 boda), da je $|FE| : |AC| = 1 : 6$, da je $|CE| : |AC| = 1 : 3$.

U drugom rješenju bodujemo uvođenje točke F i uvođenje točke T, zaključak da je T težište trokuta BCD (2 boda), navođenje omjera u kojem težište dijeli težišnicu, uočavanje da je $\overline{DG}$ srednjica trokuta ABC (2 boda), da su pravci DG i AC paralelni, te korištenje Talesovog poučka za dobivanje traženog omjera (2 boda).

Zadatak A-1.5.

Dano je 599 žutih i 301 plava kuglica. Može li se te kuglice poredati u niz tako da je broj kuglica između bilo koje dvije plave kuglice različit od 2 i od 5?

Bodovanje: Odgovor bez obrazloženja ne nosi bodove. Zadatak se rješava primjenom Dirichletovog principa. U prvom rješenju princip treba primijeniti samo jednom, u takvom slučaju podjela na disjunktne nosi 6 bodova, a zaključak 4 boda. U drugom rješenju se princip primijenjuje dva puta, pri čemu je prva primjena jednostavna, a druga vrlo slična kao u prvom rješenju. Zato prva primjena nosi 4 boda, a druga 6 bodova.

Ako učenik uoči da za svaku plavu kuglicu moramo staviti po dvije žute kuglice desno od te plave i zbog toga zaključuje da bi trebalo biti barem 602 žute kuglice, a pritom ne obraća pažnju da za plave kuglice koje se nalaze na zadnjih pet mjesta u nizu to nije istina, treba dobiti ukupno 6 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

Zadatak A-2.1.

Neka je z kompleksni broj za koji vrijedi

$$|z-5| = |z-1| + 4.$$

Dokaži da je z realni broj.

Bodovanje: U prvom rješenju geometrijska interpretacija modula i primjena nejednakosti trokuta nosi 6 bodova, a ispravan zaključak na temelju postizanja jednakosti u nejednakosti nosi 4 boda. Ako učenik koristi geometrijsku interpretaciju, ali ne koristi naziv "nejednakost trokuta", treba dobiti bodove ako navede nejednakost i tvrdi da je poznata, te ako tvrdi da jednakost vrijedi kada su točke na jednom pravcu.

U drugom rješenju ispravan zapis modula koristeći realni i imaginarni dio nosi 2 boda, a 8 bodova račun kojim se pokazuje da je $y = 0$ (po 2 boda kako je navedeno u rješenju za kvadriranje, sređivanje jednakosti tako da je korijen s jedne strane, ponovno kvadriranje i konačni zaključak).

Zadatak A-2.2.

Kvadrat $ABCD$ ima stranicu duljine 1. Neka je točka X na stranici $\overline{AB}$, a točka Y na stranici $\overline{AD}$ tako da je $\sphericalangle CXY = 90°$. Odredi položaj točke X za koji je površina trokuta CDY najmanja moguća.

Bodovanje: Izražavanje površine kao funkcije jedne varijable koja određuje položaj točke X (npr. $|AX|$, $|BX|$, $\sphericalangle BCX$ itd.) nosi ukupno 7 bodova, od kojih uočavanje i primjena sličnosti ili primjena trigonometrije u pravokutnom trokutu nosi 4 boda. Zaključak o vrijednosti u kojoj se ostvaruje minimum nosi 3 boda.

U trećem rješenju uočavanje i primjena sličnosti također nosi 4 boda, a dokaz monotonosti ukupno 6 bodova. Dokaz simetričnosti nosi 2 boda, te konačni zaključak (tj. uočavanje simetričnosti i odgovor) 2 boda.

Zadatak A-2.3.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje kvadratna jednadžba

$$x^2 - 3nx + n + 3 = 0$$

ima cjelobrojna rješenja.

Bodovanje: U prvom rješenju, ideja o korištenju Vièteovih formula i njihov zapis nosi 2 boda. Diskusija o uočenim jednakostima i pravilne ocjene koje vode do ograničenja na broj n (bilo koje konačno ograničenje) nose 6 bodova. Konačno provjeravanje svih slučajeva i zaključak da su rješenja cjelobrojna jedino za $n = 2$ nosi 2 boda.

U drugom rješenju, ideja o promatranju diskriminante dane jednadžbe i zaključak da ona mora biti potpuni kvadrat nosi 2 boda. Kao i u prvom rješenju, točan dolazak do ocjene na broj n nosi 6 bodova, a konačno uvrštavanje i zaključak da su rješenja cjelobrojna jedino za $n = 2$ nosi 2 boda.

Učenik treba dobiti svih 6 bodova samo ako je ocjena koju je dobio ispravna, tj. ako ju je točno dokazao. U slučaju da učenik ne uspijeva dobiti ocjenu ili ju dobije uz neke greške, bodovanje treba provesti što je više moguće u skladu s ponuđenim rješenjima.

Zadatak A-2.4.

Dane su dvije kružnice koja se ne sijeku, polumjera r_1 i r_2. Udaljenost dirališta zajedničke unutarnje tangente na te kružnice iznosi 12, a udaljenost dirališta zajedničke vanjske tangente na te kružnice iznosi 16. Odredi umnožak $r_1 r_2$.

Unutarnja tangenta (je ona zajednička tangenta koja) siječe dužinu koja spaja središta kružnica.

Bodovanje: U prvom rješenju uvođenje sjecišta X unutarnje i vanjske tangente nosi 1 bod. Zaključci da je $|AX| = |PX|$ i $|BX| = |QX|$ nose po 1 bod (dokaz nije potreban ako učenik napiše da su to odsječci tangenti na istu kružnicu). Izvod da je $|AX| = 14$ i $|BX| = 2$ nosi 1 bod. Zaključci da je $\sphericalangle BS_2X = \frac{1}{2}\sphericalangle QS_2B$ i $\sphericalangle AXS_1) = \frac{1}{2}\sphericalangle AXP$ nose po 1 bod (neovisno jesu li dokazani preko sukladnosti ili ne). Zaključak da su trokuti $AXS_1 i BS_2X$ slični nosi 2 boda, a izvođenje zaključka iz te sličnosti još 2 boda.

U drugom rješenju po 4 boda nosi izvod jednadžbe koja povezuje r_1 i r_2 promatrajući vanjsku, odnosno unutarnju tangentu. Pritom, 1 bod nosi uvođenje nožišta, 1 bod objašnjenje zašto smo dobili pravokutnik, te 2 boda primjena Pitagorinog poučka. Dobivanje izraza $r_1 r_2$ iz jednadžbi nosi 2 boda.

Zadatak A-2.5.

Neka je $n \geqslant 4$ prirodni broj. Dokaži da među bilo kojih n brojeva iz skupa

$$\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$$

postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s $2n$.

Bodovanje: Slučaj kad n nije jedan od odabranih brojeva nosi 3 boda, a slučaj kad je n među odabranim brojevima 7 bodova. Ideja da se u težem slučaju promatra djeljivost s n umjesto $2n$ nosi 1 bod. Formiranje n zbrojeva i pokazivanje da je zbroj nekih brojeva djeljiv s n nosi 5 bodova, a zaključak o djeljivosti s $2n$ još 1 bod.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) takvih da je $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ za koje vrijedi

$$\frac{2\sin^2 x + 2}{\sin x + 1} = 3 + \cos(x + y).$$

Bodovanje: 6 bodova nosi dokaz da je lijeva strana jednakosti manja ili jednaka 2 (pri čemu 2 boda nosi tvrdnja bez dokaza), a 1 bod da je desna strana veća ili jednaka 2. Analiza kad se postiže jednakost nosi 3 boda, od toga 1 bod za točno rješenje (čak i ako je samo pogođeno, ali tada mora biti jasno izrečeno da je to jedino rješenje).

Zadatak A-3.2.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab, \qquad a^2 - b^2 + c^2 = \sqrt{2}ac.$$

Odredi omjer $b : c$.

Bodovanje: Ako učenik ima elemente oba rješenja, treba ga ocijeniti prema obje sheme i dati veći od dva dobivena broja bodova.

U prvom rješenju, ideja zbrajanja jednadžbi nosi 3 boda, te izražavanje varijable a koristeći samo b i c još 1 bod. Eliminacija varijable a iz jedne od jednadžbi nosi 3 boda, a dobivanje omjera konačnih 3 boda.

U drugom rješenju ideja da su a, b i c stranice trokuta s kutovima $30°$ i $45°$ nosi 6 bodova, a računanje omjera nosi 4 boda (od čega 3 boda ideja primjene poučka o sinusima, a 1 bod točan rezultat). Načelno, ako učenik barata s pogrešnim kutovima ili za ispravne kutove piše pogrešne vrijednosti sinusa, oduzeti 1 bod.

U drugom rješenju učenik ne mora dokazivati da brojevi a, b i c zadovoljavaju nejednakosti trokuta, te zbog toga zaista mogu biti duljine stranica trokuta. Naime, nejednakosti trokuta slijede direktno kad god imamo identitete u formi poučka o kosinusu, što nekim učenicima može biti poznato. Iz $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab$ slijedi $(a + b)^2 = c^2 + (2 + \sqrt{3})ab > c^2$, pa je $a + b > c$. Analogno slijedi da je $a + c > b$ iz druge jednadžbe. Zbrajanjem jednadžbi kao u prvom rješenju dobivamo $a = \frac{\sqrt{3}b+\sqrt{2}c}{2} < b + c$.

Zadatak A-3.3.

Odredi sve prirodne brojeve koji su kvadrati prirodnih brojeva i u čijem su dekadskom zapisu dvije znamenke različite od 0, a jedna od te dvije je 3.

Bodovanje: 1 bod nosi argumentacija da će traženi broj završavati s parnim brojem nula. 1 bod nosi zaključak koje znamenke mogu biti zadnje znamenke kvadrata prirodnog broja, a još 1 bod nosi zaključak da je onda prva znamenka 3. Opis rješenja, tj. eliminacija mogućnosti da je $l > 0$, u slučaju kad je $b = 6$ nosi 1 bod. Eliminacija mogućnosti da je $b = 5$ i $b = 9$ nosi svaka po 1 bod (moguće je dobiti oba slučaja odjednom kao u navedenom rješenju).

Razrješavanje slučajeva kad je zadnja znamenka $b = 1$ ili $b = 4$ nosi 3 boda i moguće ga je napraviti na više načina. Točno rješenje $(36 \cdot 100^k)$ nosi 1 bod, čak i ako je samo pogođeno.

Rješenje se može zapisati na više načina, npr. koristeći zapis $\overline{a00\ldots00b}$, ali argumenti s kongruencijama, odnosno ostatcima pri dijeljenju s 4, 9 i 10 (ili nekim drugim modulima) moraju se pojavljivati.

Zadatak A-3.4.

U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = 50^\circ$ i $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC$. Dokaži da je $AC \perp BD$.

Bodovanje: 1 bod nosi izračunavanje svih potrebnih kutova. Ideja da ćemo pokazati da se nožišta okomica iz dva nasuprotna kuta četverokuta na dijagonalu podudaraju nosi 2 boda. Svođenje tog uvjeta na trigonometrijski identitet (ili ekvivalentni zapis) nosi 4 boda, a dokazivanje trigonometrijskog identiteta 3 boda. Od 4 boda za postavljanje trigonometrijskog identiteta učenik može dobiti po 1 bod za primjenu trigonometrije na pojedine trokute. Od 3 boda za dokazivanje trigonometrijskog identiteta, učenik može dobiti 1 bod ako ne dokaže identitet, ali primijeni neke korisne transformacije.

Zadatak A-3.5.

Neka je n prirodni broj. Niz od $2n$ realnih brojeva je *dobar* ako za svaki prirodni broj $1 \leqslant m \leqslant 2n$ vrijedi da je zbroj prvih m ili zbroj zadnjih m članova niza cijeli broj. Odredi najmanji mogući broj cijelih brojeva u dobrom nizu.

Bodovanje: 1 bod nosi točan odgovor, čak i bez dodatnih pojašnjenja. Zaključak da je prvi ili zadnji član niza cijeli broj nosi 1 bod. 2 boda nosi dokaz činjenice da je zbroj prvih pola članova niza i zbroj drugih pola članova niza cijeli broj. Dodatna 2 boda učenik treba dobiti pokaže li da je uvijek jedan od dva člana u sredini niza (x_n i x_{n+1}) cijeli broj. Primjer dobrog niza za parni n, odnosno za neparni n nose 1 bod, ako su to dobri primjeri. Pojašnjenje ispravnosti svakog od primjera nosi po 1 bod.

Pokaže li učenik na neki drukčiji način da su uvijek barem dva cijela broja u dobro nizu, treba dobiti svih 6 bodova koliko nosi taj dio rješenja.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

Zadatak A-4.1.

Prirodni broj zovemo *babilonskim* ako je veći od 9 i ako je njegov zapis u sustavu s bazom 60 jednak njegovom dekadskom zapisu bez vodeće znamenke. Npr. broj 123 je babilonski jer je $123 = (23)_{60}$. Koliko ima babilonskih brojeva manjih od 10 000?

Bodovanje: Dokaz činjenice da ne postoje dvoznamenkasti babilonski brojevi nosi 1 bod. 2 boda vrijedi uočavanje veze među znamenkama troznamenkastih babilonskih brojeva, dok njihovo prebrojavanje vrijedi još 1 bod. Također 2 boda vrijedi uočavanje veze među znamenkama četveroznamenkastih babilonskih brojeva. Prebrojavanje svih četveroznamenkastih babilonskih brojeva vrijedi 4 boda. Učenik to može na više različitih načina napraviti, svaki od tih načina treba bodovati što je moguće više u skladu s ponuđenim rješenjem. Preciznije, uočavanje da je $c = 0$ vrijedi 1 bod, nakon toga zaključujemo da je znamenka b parna, što također vrijedi 1 bod. Preostaje zaključiti da je jedina mogućnost da je $b = 2$ i $a = 7$, to vrijedi isto 1 bod. Konačno prebrojavanje vrijedi 1 bod.

Zadatak A-4.2.

Neka je n prirodni broj. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Bodovanje: U dokazu indukcijom, sama ideja dokaza indukcijom nosi 1 bod, a dokaz baze indukcije nosi 1 bod. Također 1 bod nosi točan zapis sume S_{n+1}, a još 1 bod nosi ispravno uočavanje sume S_n u sumi S_{n+1}, tj. ispravno uočavanje pretpostavke u koraku. Ispravan zapis izraza $S_{n+1} - S_n$ zajedno sa zaključkom da je dovoljno pokazati da je taj izraz veći od 0 nosi 2 boda. Konačnih 4 boda nosi dokaz da je $S_{n+1} - S_n > 0$. Za svaku grešku u računu u tom dokazu učenik treba izgubiti 1 bod.

U dokazu pomoću A–H nejednakosti, sama ideja primjene te nejednakosti nosi 1 bod. 3 boda nosi ispravan zapis nejednakosti s danim brojevima. 1 bod nosi komentar da jednakost ne može vrijediti jer ne vrijedi da su svi brojevi međusobno jednaki. Sređivanje A–H nejednakosti kako bismo s jedne strane dobili traženi izraz nosi 2 boda. Konačno sređivanje druge strane i uočavanje da je ona jednaka 1 nosi 3 boda.

Zadatak A-4.3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC.

Dokaži da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Bodovanje: Načelno, uočavanje svakog od dva bitna tetivna četverokuta nosi 1 bod, a zaključak da su određeni kutovi u njima jednaki jer su obodni nad istom tetivom po 2 boda. Korištenje činjenice da je M polovište kako bi se dobila jednakost određenih kutova koja će povezati kutove u dva tetivna četverokuta nosi 2 boda. Konačna 2 boda se dobivaju za povezivanje svih triju dijelova.

U trigonometrijskom rješenju, uz navedene napomene o tetivnosti, 1 bod nosi izražavanje duljine dužine $\overline{QP}$, a 2 boda dužine $\overline{PS}$. Izračun kuta $\sphericalangle PXS$ nosi 1 bod, a primjena poučka o sinusima na trokut PSX također 1 bod. Konačno, sređivanje dobivenih izraza korištenjem svojstava trigonometrijskih funkcija nosi 2 boda.

Zadatak A-4.4.

Ploča P je dobivena uklanjanjem tri polja u kutovima ploče 7×7. U svako od 46 polja ploče P upisan je neki prirodni broj. Razlika brojeva u bilo koja dva polja koja imaju zajedničku stranicu je najviše 4. Dokaži da su u neka dva polja upisani isti brojevi.

Bodovanje: Ideja promatranja udaljenosti polja nosi 2 boda, a zaključak da je najveća udaljenost 11 1 bod, dok dokaz te tvrdnje nosi 2 boda. Zaključak da je najveća razlika vrijednosti bilo koja dva polja na ploči najviše 44 nosi još 2 boda, a primjena Dirichletovog principa (iako se ne mora tako nazvati) kako bi se zaključilo da neka dva broja moraju biti ista nosi 3 boda.

Zadatak A-4.5.

Neka je d prirodni broj te (a_n) aritmetički niz prirodnih brojeva s razlikom d. Ako je $d \leqslant 2018$, dokaži da najviše 11 uzastopnih članova niza (a_n) mogu biti prosti brojevi.

Bodovanje: Dokaz činjenice da je prvi član hipotetskog niza od 12 uzastopnih prostih brojeva veći 11 nosi 2 boda. Ideja da se pokaže da je d djeljiv sa svim prostim brojevima do, uključivo, 11 nosi 2 boda. Uočavanje poznate tvrdnje iz Napomene, uz napomenu da je to poznata tvrdnja ili uz dokaz te tvrdnje (npr. kao u Napomeni) nosi 4 boda. Zaključak (na osnovi poznate tvrdnje) da je d djeljiv s p nosi 1 bod. Konačno uočavanje kontradikcije s uvjetom da je $d \leqslant 2018$ nosi 1 bod. Učenik koji ima sve osim dokaza činjenice da je a_n (tj. prvi član hipotetskog niza od 12 uzastopnih prostih brojeva) veći od 11 treba dobiti najviše 8 bodova.