ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

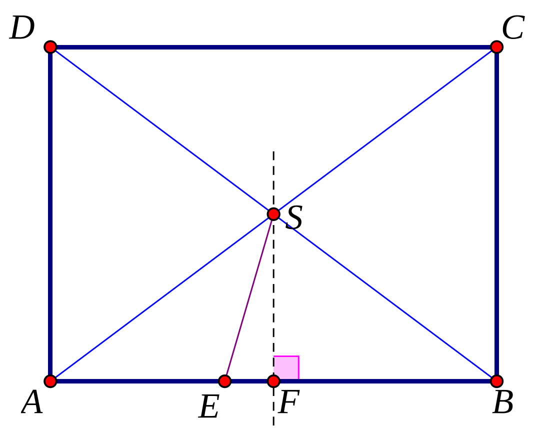
1. Prvi način:

$a^2 = (2^{2020} – 2^{2019})^2 = (2^{2020})^2 – 2 \cdot 2^{2020} \cdot 2^{2019} + (2^{2019})^2 =$ 1 BOD
$= 2^{4040} – 2^{4040} + 2^{4038} = 2^{4038}$ 2 BODA
$b^2 = (2^{2018} + 2^{2017})^2 = (2^{2018})^2 + 2 \cdot 2^{2018} \cdot 2^{2017} + (2^{2017})^2 =$ 1 BOD
$= 2^{4036} + 2^{4036} + 2^{4034} = 2 \cdot 2^{4036} + 2^{4034} = 2^{4037} + 2^{4034}$ 2 BODA
$c^2 = (2^{2019} + 2^{2017})^2 = (2^{2019})^2 + 2 \cdot 2^{2019} \cdot 2^{2017} + (2^{2017})^2 =$ 1 BOD
$= 2^{4038} + 2^{4037} + 2^{4034}$ 2 BODA
Budući da vrijedi:
$a^2 + b^2 = 2^{4038} + 2^{4037} + 2^{4034} = c^2$, trokut je pravokutan. 1 BOD
…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

$a = 2^{2017} \cdot (2^3 – 2^2) = 2^{2017} \cdot (8 – 4) = 4 \cdot 2^{2107}$ 2 BODA
$b = 2^{2017} \cdot (2^1 + 1) = 2^{2017} \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 2^{2107}$ 2 BODA
$c = 2^{2017} \cdot (2^2 + 1) = 2^{2017} \cdot (4 + 1) = 5 \cdot 2^{2107}$ 2 BODA
Tada je:
$a^2 = (4 \cdot 2^{2017})^2 = 16 \cdot 2^{4034}$ 1 BOD
$b^2 = (3 \cdot 2^{2017})^2 = 9 \cdot 2^{4034}$ 1 BOD
$c^2 = (5 \cdot 2^{2017})^2 = 25 \cdot 2^{4034}$ 1 BOD
Budući da vrijedi:
$a^2 + b^2 = 16 \cdot 2^{4034} + 9 \cdot 2^{4034} = 25 \cdot 2^{4034} = (5 \cdot 2^{2017})^2 = c^2$, trokut je pravokutan. 1 BOD
…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



Skica (s nacrtanom točkom F, polovištem stranice $\overline{AB}$): 1 BOD
Za pravokutni trokut ΔEFS vrijedi Pitagorin poučak:
$|ES|^2 = |EF|^2 + |FS|^2$ (*) 1 BOD

Vrijedi $|FS|=\frac{1}{2}|BC|=$ 6 cm. 1 BOD

Ako označimo $|AE|=|ES|=x$, tada vrijedi:

$|EF|=|AF|-|AE|=\frac{1}{2}|AB|-|AE|=8-x$. 1 BOD

Dobiveno uvrstimo u (*) i računamo:

$x^2=(8-x)^2+6^2$ 1 BOD

$x^2=64-16x+x^2+36$ 1 BOD

$16x=100$

$x=\frac{25}{4}=6.25$ cm 1 BOD

Tada je i $|AE|=6.25$ cm. 1 BOD

U trokutu ΔAES poznate su duljina stranice $\overline{AE}$ i duljina visine $\overline{FS}$ na tu stranicu.

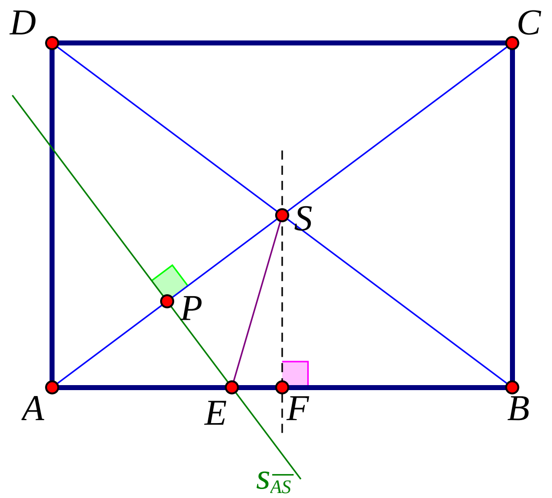
Površina je $P=\frac{|AE|\cdot|FS|}{2}=\frac{6.25\cdot 6}{2}$ cm^2. 1 BOD

Površina trokuta ΔAES jednaka je P = 18.75 cm^2. 1 BOD

…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica (potpuna): 1 BOD



Primjenom Pitagorinog poučka, na pravokutan trokut ΔABC možemo izračunati duljine dijagonala.

$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$

$|AC|^2=16^2+12^2=256+144=400$

$|AC|=20$ cm 1 BOD

Točka S je sjecište dijagonala, pa je onda $|AS|=\frac{1}{2}|AC|=10$ cm.

Točka E jednako je udaljena od točaka A i S, što znači da točka E pripada simetrali $s_{\overline{AS}}$ dužine $\overline{AS}$.

Simetrala $s_{\overline{AS}}$ i dužina $\overline{AS}$ sijeku se u točki P. Točka P je polovište dužine $\overline{AS}$.

Tada je $|AP|=\frac{1}{2}|AS|=5$ cm. 1 BOD

Prema K-K poučku vrijedi $\Delta AEP \sim \Delta ABC$ (jedan pravi kut i jedan zajednički kut u vrhu A).
Iz sličnosti slijedi:

$|AP|:|AB|=|AE|:|AC|$ 1 BOD

$5:16=|AE|:20$ 1 BOD

$|AE|=\frac{5\cdot 20}{16}=\frac{25}{4}$ 1 BOD

$|AE|=6.25$ cm 1 BOD

Vrijedi $|FS|=\frac{1}{2}|BC|=6$ cm. 1 BOD

U trokutu ΔAES znamo duljinu stranice $\overline{AE}$ i duljinu visine $\overline{FS}$ na tu stranicu.

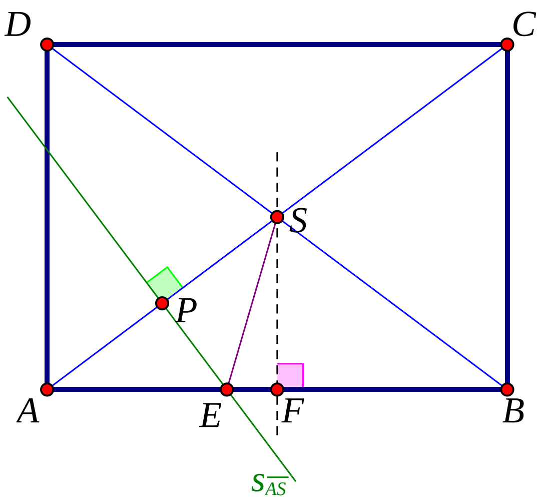
Površina je $P=\frac{|AE|\cdot|FS|}{2}=\frac{6.25\cdot 6}{2}$ cm^2. 1 BOD

Površina trokuta ΔAES jednaka je P = 18.75 cm^2. 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Skica (potpuna): 1 BOD



Primjenom Pitagorinog poučka, na pravokutan trokut ΔABC možemo izračunati duljine dijagonala.

$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$

$|AC|^2=16^2+12^2=256+144=400$

$|AC|=20$ cm 1 BOD

Točka S je sjecište dijagonala, pa je onda $|AS|=\frac{1}{2}|AC|=10$ cm.

Točka E jednako je udaljena od točaka A i S, što znači da točka E pripada simetrali $s_{\overline{AS}}$ dužine $\overline{AS}$.

Simetrala $s_{\overline{AS}}$ i dužina $\overline{AS}$ sijeku se u točki P. Točka P je polovište dužine $\overline{AS}$.

Tada je $|AP|=\frac{1}{2}|AS|=5$ cm. 1 BOD

Prema K-K poučku vrijedi $\Delta AEP \sim \Delta ABC$ (jedan pravi kut i jedan zajednički kut u vrhu A).
Iz sličnosti slijedi:

$|AP|:|AB| = |AE|:|AC|$ 1 BOD

$5:16 = |AE|:20$ 1 BOD

$|AE| = \frac{5 \cdot 20}{16} = \frac{25}{4}$ 1 BOD

$|AE| = 6.25 \text{ cm}$ 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutan trokut ΔEPA računamo:

$$|EP|^2 = |AE|^2 - |AP|^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 - 5^2 = \frac{625}{16} - 25 = \frac{225}{16}$$

$|EP| = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ cm}$ 1 BOD

Površina trokuta ΔAES dvostruko je veća od površine trokuta ΔAEP.

$P_{\Delta AEP} = \frac{|AP| \cdot |EP|}{2} = \frac{5 \cdot 3.75}{2} = 9.375 \text{ cm}^2$, 1 BOD

pa je površina trokuta ΔAES jednaka $P_{\Delta AES} = 2 \cdot P_{\Delta AEP} = 18.75 \text{ cm}^2$. 1 BOD

…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

3. a) Prvi način:

Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$. 1 BOD

Povoljni su oni parovi brojeva koji daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 5.
Među brojevima napisanim na kuglicama označimo:

A_0 = {brojevi koji su djeljivi brojem 5} = {5, 10, 15, 20, 25,30}
A_1 = {brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 1} = {1, 6, 11, 16, 21, 26}
A_2 = {brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 2} = {2, 7, 12, 17, 22, 27}
A_3 = {brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 3} = {3, 8, 13, 18, 23, 28}
A_4 = {brojevi koji pri dijeljenju brojem 5 daju ostatak 4} = {4, 9, 14, 19, 24, 29}
U svakom od tih skupova ima 6 brojeva. 1 BOD

Povoljni parovi brojeva su oni koji su izvučeni iz istog skupa.
Broj povoljnih parova brojeva

iz skupa A_0 jednak je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$,

iz skupa A_1 jednak je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$,

iz skupa A_2 jednak je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$,

iz skupa A_3 jednak je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$,

iz skupa A_4 jednak je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. 1 BOD

Dakle, ukupan broj povoljnih ishoda jednak je $5 \cdot 15 = 75$. 1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$p=\frac{75}{435}=\frac{5}{29}$. 1 BOD

Drugi način:

Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30\cdot 29}{2}=435$. 1 BOD

Prebrojimo sve povoljne ishode:
Broj 1 je u paru s brojevima 6, 11, 16, 21, 26.
Broj 2 je u paru s brojevima 7, 12, 17, 22, 27.
Broj 3 je u paru s brojevima 8, 13, 18, 23, 28,
Broj 4 je u paru s brojevima 9, 14, 19, 24, 29.
Broj 5 je u paru s brojevima 10, 15, 20, 25, 30.

$5\cdot 5=25$ parova

Broj 6 je u paru s brojevima 11, 16, 21, 26.
Broj 7 je u paru s brojevima 12, 17, 22, 27.
Broj 8 je u paru s brojevima 13, 18, 23, 28.
Broj 9 je u paru s brojevima 14, 19, 24, 29.
Broj 10 je u paru s brojevima 15, 20, 25, 30.

$5\cdot 4=20$ parova

Broj 11 je u paru s brojevima 16, 21, 26.
Broj 12 je u paru s brojevima 17, 22, 27.
Broj 13 je u paru s brojevima 18, 23, 28.
Broj 14 je u paru s brojevima 19, 24, 29.
Broj 15 je u paru s brojevima 20, 25, 30.

$5\cdot 3=15$ parova

Broj 16 je u paru s brojevima 21, 26.
Broj 17 je u paru s brojevima 22, 27.
Broj 18 je u paru s brojevima 23, 28.
Broj 19 je u paru s brojevima 24, 29.
Broj 20 je u paru s brojevima 25, 30.

$5\cdot 2=10$ parova

Broj 21 je u paru s brojem 26.
Broj 22 je u paru s brojem 27.
Broj 23 je u paru s brojem 28.
Broj 24 je u paru s brojem 29.
Broj 25 je u paru s brojem 30.

$5\cdot 1=5$ parova

2 BODA

Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je: $25+20+15+10+5=75$. 1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$p=\frac{75}{435}=\frac{5}{29}$. 1 BOD

Treći način:

Izvlačeći dvije kuglice s brojevima od 1 do 30 moguće je dobiti sljedeće razlike djeljive brojem 5: 5, 10, 15, 20 i 25. 1 BOD

Razliku 5 je moguće dobiti kao 6 – 1, 7 – 2, 8 – 3, …, 30 – 25; na 25 načina,

razliku 10 je moguće dobiti kao 11 – 1, 12 – 2, …, 30 – 20; na 20 načina,
razliku 15 je moguće dobiti kao 16 – 1, …, 30 – 15; na 15 načina,
razliku 20 je moguće dobiti kao 21 – 1, …, 30 – 10; na 10 načina,
razliku 25 je moguće dobiti kao 26 – 1, …, 30 – 5; na 5 načina. 1 BOD

Ukupan broj izvlačenja dvaju brojeva čija je razlika djeljiva brojem 5 jednak je
$25+20+15+10+5=75$. 1 BOD

Ukupan broj parova dvoznamenkastih brojeva jednak je $\frac{30\cdot 29}{2}=435$. 1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$p=\frac{75}{435}=\frac{5}{29}$. 1 BOD

Napomena 1: Zadnji bod treba dodijeliti isključivo ukoliko je rezultat točan.
Napomena 2: Učenici su mogli umjesto parova brojeva prebrojavati uređene parove, u kojima je bitan poredak izvučenih brojeva. Oni će dobiti dvostruko veći broj povoljnih (150), ali i ukupnih (870) događaja, pa će tražena vjerojatnost ostati ista.
Napomena 3: Zadatak se može riješiti i na sljedeći način: ponovo promatrajmo uređene parove, tj. vodimo računa o redoslijedu izvlačenja. S obzirom kako, nakon izbora prvog broja znamo koliki on ostatak daje pri dijeljenju s 5, povoljnih mogućnosti za izbor drugog broja imamo 5 (to su preostalih 5 brojeva koji daju isti ostatak pri dijeljenju s 5), a broj brojeva koji biramo je 29. Kako skupovi A_0, … , A_4 imaju isti broj elemenata, posve je svejedno koji će broj prvi izabran. Zato je tražena vjerojatnost $\frac{5}{29}$. Ovakav način rješavanja treba priznati kao točan.

b) Prvi način:

Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30\cdot 29}{2}=435$. 1 BOD

Zbroj dvaju brojeva djeljiv je brojem 5 ako vrijedi:

1. oba broja su djeljiva brojem 5. To su brojevi skupa {5, 10, 15, 20, 25, 30}. Dva broja iz tog skupa možemo odabrati na $\frac{6\cdot 5}{2}=15$.
2. jedan broj je oblika 5*k* + 1 (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 1), a drugi broj je oblika 5*k* + 4 (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 4). To su brojevi 1, 6, 11, 16, 21, 26, odnosno 4, 9, 14, 19, 24, 29. Ukupno imamo $6\cdot 6=36$ takvih parova.
3. jedan broj je oblika 5*k* + 2 (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 2), a drugi broj je oblika 5*k* + 3 (ili pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 3). To su brojevi 2, 7, 12, 17, 22, 27, odnosno 3, 8, 13, 18, 23, 28. Ukupno imamo $6\cdot 6=36$ takvih parova. 2 BODA

Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je: $15+36+36=87$. 1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$p=\frac{87}{435}=\frac{1}{5}$. 1 BOD

Drugi način:

Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30\cdot 29}{2}=435$. 1 BOD

Prebrojimo sve povoljne ishode:
Broj 1 je u paru s brojevima 4, 9, 14, 19, 24, 29.

Broj 2 je u paru s brojevima 3, 8, 13, 18, 23, 28.

$2 \cdot 6 = 12$ parova

Broj 3 je u paru s brojevima 7, 12, 17, 22, 27.
Broj 4 je u paru s brojevima 6, 11, 16, 21, 26.
Broj 5 je u paru s brojevima 10, 15, 20, 25, 30.
Broj 6 je u paru s brojevima 9, 14, 19, 24, 29.
Broj 7 je u paru s brojevima 8, 13, 18, 23, 28.

$5 \cdot 5 = 25$ parova

Broj 8 je u paru s brojevima 12, 17, 22, 27.
Broj 9 je u paru s brojevima 11, 16, 21, 26.
Broj 10 je u paru s brojevima 15, 20, 25, 30.
Broj 11 je u paru s brojevima 14, 19, 24, 29.
Broj 12 je u paru s brojevima 13, 18, 23, 28.

$5 \cdot 4 = 20$ parova

Broj 13 je u paru s brojevima 17, 22, 27.
Broj 14 je u paru s brojevima 16, 21, 26.
Broj 15 je u paru s brojevima 20, 25, 30.
Broj 16 je u paru s brojevima 19, 24, 29.
Broj 17 je u paru s brojevima 18, 23, 28.

$5 \cdot 3 = 15$ parova

Broj 18 je u paru s brojevima 22, 27.
Broj 19 je u paru s brojevima 21, 26.
Broj 20 je u paru s brojevima 25, 30.
Broj 21 je u paru s brojevima 24, 29.
Broj 22 je u paru s brojevima 23, 28.

$5 \cdot 2 = 10$ parova

Broj 23 je u paru s brojem 27.
Broj 24 je u paru s brojem 26.
Broj 25 je u paru s brojem 30.
Broj 26 je u paru s brojem 29.
Broj 27 je u paru s brojem 28.

$5 \cdot 1 = 5$ parova

2 BODA

Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je: $12+25+20+15+10+5=87$. 1 BOD

Tražena vjerojatnost jednaka je

$p=\frac{87}{435}=\frac{1}{5}$. 1 BOD

Treći način:

Izvlačeći dvije kuglice s brojevima od 1 do 30 moguće je dobiti sljedeće zbrojeve djeljive brojem 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 i 55. 1 BOD

Zbroj 5 je moguće dobiti kao 1 + 4, 2 + 3; na 2 načina.
Zbroj 10 je moguće dobiti kao 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 5; na 4 načina.
Zbroj 15 je moguće dobiti kao 1 + 14, 2 + 13, …, 7 + 8; na 7 načina.
Zbroj 20 je moguće dobiti kao 1 + 19, 2 + 18, …, 9 + 11; na 9 načina.
Zbroj 25 je moguće dobiti kao 1 + 24, 2 + 23, …, 12 + 13; na 12 načina.
Zbroj 30 je moguće dobiti kao 1 + 29, 2 +28, …, 14 + 16; na 14 načina.

Zbroj 35 je moguće dobiti kao 5 + 30, 6 + 29, …, 17 + 18; na 13 načina.
Zbroj 40 je moguće dobiti kao 10 + 30, 11 + 29, …, 19 + 21; na 10 načina.
Zbroj 45 je moguće dobiti kao 15 + 30, 16 + 29, …, 22 + 23; na 8 načina.
Zbroj 50 je moguće dobiti kao 20 + 30, 21 + 29, …, 24 + 26; na 5 načina.
Zbroj 55 je moguće dobiti kao 25 + 30, 26 + 29, 27 + 28; na 3 načina. 1 BOD
Ukupan broj izvlačenja dvaju brojeva čiji je zbroj djeljiv brojem 5 jednak je
2 + 4 + 7 + 9 + 12 + 14 + 13 + 10 + 8 + 5 + 3 = 87. 1 BOD
Ukupan broj svih mogućih izvučenih parova brojeva jednak je $\frac{30\cdot 29}{2}=435$. 1 BOD
Tražena vjerojatnost jednaka je
$p=\frac{87}{435}=\frac{1}{5}$. 1 BOD

Napomena 1: Zadnji bod treba dodijeliti isključivo ukoliko je rezultat točan.
Napomena 2: Učenici su i ovdje mogli umjesto parova brojeva prebrojavati uređene parove, u kojima je bitan poredak izvučenih brojeva. Oni će dobiti dvostruko veći broj povoljnih (174), ali i ukupnih (870) događaja, pa će tražena vjerojatnost ostati ista.
Napomena 3: Zadatak se može riješiti i na sljedeći način: ponovo promatrajmo uređene parove, pri čemu je važan redoslijed izvlačenja brojeva. Za prvi broj su dvije mogućnosti: ili je djeljiv brojem 5 (s vjerojatnošću $\frac{1}{5}$) ili nije (s vjerojatnošću $\frac{4}{5}$), ako je prvi djeljiv brojem 5, onda i drugi mora biti djeljiv brojem 5 s vjerojatnošću $\frac{5}{29}$. U slučaju da, prvi izvučeni broj daje ostatak *k* pri dijeljenju brojem 5, onda će drugi dati ostatak $5-k$ pri dijeljenju brojem 5 s vjerojatnošću $\frac{6}{29}$. Tražena vjerojatnost je $p=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{29}+\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{29}=\frac{1}{5}$. Ovakav način rješavanja treba priznati kao točan.
……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Rastav broja 120 na proste faktore je $120=2^3\cdot 3\cdot 5$.
Dakle, da bi broj bio djeljiv brojem 120, mora biti djeljiv brojem 3, brojem 5 i brojem 8. 1 BOD
Među tri uzastopna prirodna broja točno je jedan djeljiv brojem 3 pa je umnožak tri uzastopna prirodna broja uvijek djeljiv brojem 3. 1 BOD
Neka je prvi od tri uzastopna broja *m* **paran**.
Tada je i treći broj (*m* + 2) paran. Jedan od dva uzastopna parna broja djeljiv je brojem 2, a drugi brojem 4, pa je njihov umnožak djeljiv brojem 8. 1 BOD
Djeljivost brojem 5 bit će ispunjena ako je bilo koji od triju brojeva djeljiv brojem 5. To je moguće ako i samo ako prvi ili treći (parni) broj završava znamenkom 0, odnosno ako drugi (neparni) završava znamenkom 5.
U traženim trojkama prvi broj može biti oblika $\overline{ab0}$, treći broj može biti oblika $\overline{cd0}$ ili drugi broj u trojci može biti oblika $\overline{ef5}$. 1 BOD
Dakle, u traženim trojkama prvi broj može biti oblika $\overline{ab0}$, gdje su brojevi *a* i *b* bilo koje znamenke iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0} pri čemu je znamenka $a\neq 0$, i takvih je brojeva **90**.
Analogno, treći broj može biti oblika $\overline{cd0}$. I tu ima 90 mogućnosti, ali se u prvoj (98, 99, 100) pojavljuju dvoznamenkasti brojevi. Traženih trojki ovog oblika ima **89**.

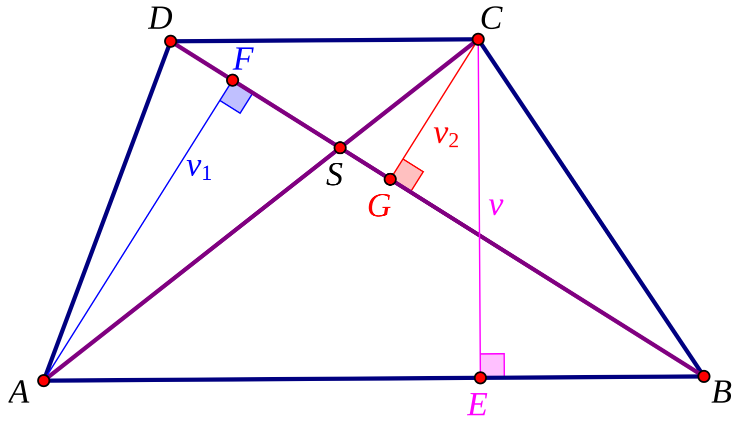
Dakle, trojki gdje prvi ili treći broj završava znamenkom 0 ima 90 + 89 = 179. 1 BOD

Drugi broj u trojci može biti oblika $\overline{ef5}$. I takvih trojki ima **90**. 1 BOD

Neka je sada prvi broj *m* u trojci **neparan**.
Kako je i treći broj (*m* + 2) neparan, nužno je da drugi broj(*m* + 1) bude djeljiv brojem 8. 1 BOD
Budući da kombiniramo djeljivost brojem 8 i djeljivost brojem 5, dovoljno je promatrati prvih 40 mogućnosti.
Srednji broj (*m* + 1) može biti 104, 112, 120, 128 ili 136, no ili on ili njegov neposredni prethodnik ili sljedbenik moraju biti djeljivi brojem 5.
To se događa u tri slučaja: (103, 104, 105), (119, 120, 121) i (135, 136, 137). 1 BOD
Troznamenkastih brojeva ima 900, a iz 900 = 40 · 22 + 20 slijedi da traženih brojeva ima 22 · 3 = 66, te još u zadnjih 20 brojeva broj 984. Traženih trojki ovog oblika ima **67**. 1 BOD
Ukupan broj trojki je 90 + 89 + 90 + 67 = 336. 1 BOD
…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA
Napomena 1: Zadnji bod se dodjeljuje samo ako je rezultat točan.
Napomena 2: Ispisivanje određenog broja odgovarajućih trojki (naravno ne svih) koje zadovoljavaju uvjete zadatka bez navođenja opće strategije prebrojavanja svih takovih trojki treba vrednovati s 0 BODOVA.

Drugi način:
Učenik koji zaključi da umnožak mora biti djeljiv brojem 3, brojem 8 i brojem 5, da je umnožak tri uzastopna prirodna broja uvijek djeljiv brojem 3, da je umnožak tri uzastopna broja djeljiv brojem 8 ako i samo je ako je prvi broj u umnošku paran ili ako je prvi broj u umnošku neparan, a drugi djeljiv brojem 8, te da je umnožak tri uzastopna broja je djeljiv brojem 5 ako i samo ako *m* daje ostatke 0, 3 ili 4 pri dijeljenju brojem 5 5 BODOVA
dalje može zaključivati i na sljedeći način:
Iz gore navedenog zaključujemo da je umnožak tri broja djeljiv brojem120 ako i samo ako daje ostatke 0, 4, 8, 10, 14, 15, 18, 20, 23, 24, 28, 30, 34, 38 ili 39 pri dijeljenju brojem 40.
To znači da za 40 uzastopnih vrijednosti broja *m* njih točno 15 zadovoljava uvjete zadatka.
Uzevši u obzir uvjet da sva tri broja ~~u~~ umnoška moraju biti troznamenkasta, *m* može biti prirodan broj između 100 i 997 (uključivo rubne vrijednosti).
Uočimo da 100 daje ostatak 20 pri dijeljenju brojem 40 i da 997 daje ostatak 37 pri dijeljenju brojem 40. Dakle, za vrijednosti broja *m* od 100 do 979 (uključivo rubne vrijednosti) imamo ukupno 22 skupa 40 uzastopnih prirodnih brojeva te ukupno $22 \cdot 15 = 330$ brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka, dok za vrijednosti *m* između 980 i 997 (uključivo rubne vrijednosti), ostatci broja *m* pri dijeljenju brojem 40 su između 20 i 37 (uključivo rubne vrijednosti) i imamo 6 brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka.
To znači da traženih trojki ima $330 + 6 = 336$. 5 BODOVA
…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA
Napomena: U slučaju ovakvog načina rješavanja, bodovanje s zadnjih 5 BODOVA mora biti usklađeno s bodovnom shemom iz prvog načina rješavanja.

5. Skica: 1 BOD



Površine trokuta ΔABD i ΔABC su jednake (trokuti imaju zajedničku stranicu $\overline{AB}$, i visinu *v*, koja je i visina trapeza). Dakle, vrijedi: $P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ABC}$.

Promotrimo trokute ΔASD i ΔBCS. Za njihove površine vrijedi:

$P_{\Delta ASD} = P_{\Delta ABD} - P_{\Delta ABS} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta ABS} = P_{\Delta BCS}$, 1 BOD

tj. trokuti ΔASD i ΔBCS imaju jednake površine: $P_{\Delta ASD} = P_{\Delta BCS} = P_3$. 1 BOD

Trokuti ΔASD i ΔABS imaju zajedničku visinu iz vrha *A* duljine v_1 pa možemo površine trokuta zapisati kao:

$P_{\Delta ASD} = P_3 = \dfrac{|SD| \cdot v_1}{2}$ i $P_{\Delta ABS} = P_1 = \dfrac{|SB| \cdot v_1}{2}$. 1 BOD

Slijedi da je $P_3 : P_1 = |SD| : |SB|$. 1 BOD

Trokuti ΔCDS i ΔBCS imaju zajedničku visinu iz vrha C duljine v_2 pa površine trokuta možemo zapisati kao:

$P_{\Delta CDS} = P_2 = \dfrac{|SD| \cdot v_2}{2}$ i $P_{\Delta BCS} = P_3 = \dfrac{|SB| \cdot v_2}{2}$. 1 BOD

Slijedi da je $P_2 : P_3 = |SD| : |SB|$. 1 BOD

Dakle,

$P_3 : P_1 = P_2 : P_3 \Rightarrow P_3^2 = P_1 \cdot P_2 \Rightarrow P_3 = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$. 1 BOD

Površina trapeza *ABCD* jednaka je:

$P = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta CDS} + P_{\Delta ASD} + P_{\Delta BCS} = P_1 + P_2 + 2 \cdot P_3 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 \cdot P_2} =$

$= \left(\sqrt{P_1}\right)^2 + \left(\sqrt{P_2}\right)^2 + 2\sqrt{P_1 \cdot P_2} = \left(\sqrt{P_1}\right)^2 + 2\sqrt{P_1 \cdot P_2} + \left(\sqrt{P_2}\right)^2 = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$. 2 BODA

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA