Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

1. Odredi sve troznamenkaste brojeve sa zbrojem znamenaka 11 od kojih se zamjenom znamenki jedinica i stotica dobiva za 594 veći broj.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3 \qquad \text{i} \qquad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=10.$$

Odredi $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

3. Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle CAB = 20^\circ$ i neka je D polovište stranice $\overline{AB}$.
Ako je $\sphericalangle CDB = 40^\circ$, odredi $\sphericalangle ABC$.

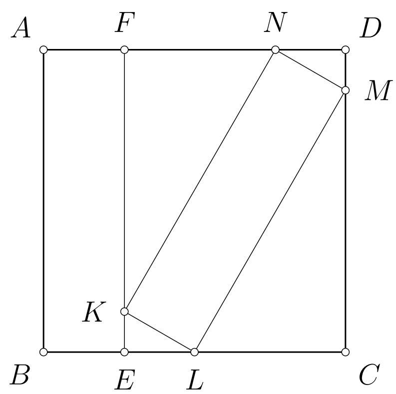
4. Za kvadratnu ploču čija su polja obojena crnom ili bijelom bojom kažemo da je *lijepa* ako se njezin izgled ne mijenja rotacijom za 90°.
Koliko ima različitih lijepih ploča dimenzija 5×5?

5. Odredi sve parove (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi $mn + 5m + 2n = 121$.

* * *

6. Borna želi svaki od brojeva $2, 3, \ldots, 32$ obojiti jednom od k boja ($k \in \mathbb{N}$) tako da nijedan broj ne bude višekratnik nekog drugog broja iste boje. Odredi najmanji prirodni broj k za koji Borna može to postići.

7. Na slici je kvadrat $ABCD$ stranice duljine 1. Ako su $ABEF$ i $KLMN$ sukladni pravokutnici, odredi duljinu $|BE|$.



Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

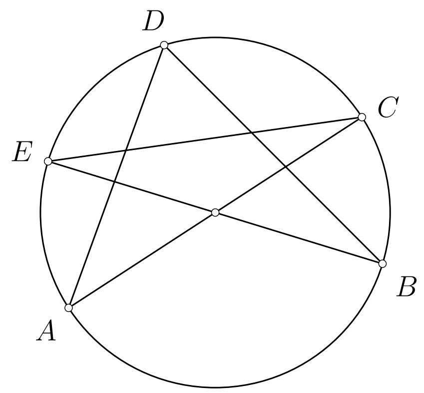
2. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$.

2. Odredi sve parove (p, q) prostih brojeva za koje kvadratna jednadžba $x^2 + px + q = 0$ ima dva različita rješenja u skupu cijelih brojeva.

3. Na kružnici je dano pet točaka kao na slici. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u središtu kružnice. Ako je $\sphericalangle DAC = 37°$ i $\sphericalangle EBD = 28°$, odredi kut $\sphericalangle ACE$.



4. Nađi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$xy^3 = -135, \qquad (x + y)y = -6.$$

5. Koliko ima različitih narukvica koje se sastoje od četiri crne i četiri bijele kuglice poredane ukrug? Dvije narukvice smatramo različitima ako se ne mogu okrenuti tako da poredci kuglica na njima budu isti.

* * *

6. U kupaonici dimenzija $6\,\text{m} \times 6\,\text{m}$ jedan kut zauzima pravokutna kada dimenzija $2\,\text{m} \times 1.5\,\text{m}$. Koliki je polumjer najvećeg kružnog tepiha koji se može raširiti na podu kupaonice?

7. Između gradova prometuju jednosmjerne avionske linije. Za svaka dva grada A i B postoji točno jedna linija: ili iz A prema B, ili iz B prema A. Dokaži da postoji grad iz kojeg je moguće doći do bilo kojeg drugog grada s najviše jednim presjedanjem.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

1. Izračunaj

$$\frac{\operatorname{tg} 192^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 168^\circ \cdot \operatorname{tg} 408^\circ}.$$

2. Baza pravilne uspravne četverostrane piramide je kvadrat stranice duljine 12, a duljina visine je 8. Koliko je oplošje te piramide?

3. Odredi posljednjih 2019 znamenaka broja $2^{2019} \cdot 5^{2018} \cdot 9^{2017}$.

4. Neka je a pozitivni realni broj za koji vrijedi $\log_{4a} 40\sqrt{3} = \log_{3a} 45$. Dokaži da je a^3 cijeli broj i odredi ga.

5. Umnožak određenog broja međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od 1000 nije djeljiv brojem 250. Koliko je najviše brojeva pomnoženo?

$* \quad * \quad *$

6. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BCA$. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D tako da je $|AB| = |CD|$. Odredi $\sphericalangle CAB$.

7. Marko stavlja novčiće na neka polja 3×3 ploče, a zatim zapisuje koliko je novčića u svakom pojedinom retku i stupcu. Koliko najmanje novčića Marko mora staviti na ploču ako želi da tih šest brojeva bude međusobno različito?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

1. Umnožak drugog i četvrtog člana aritmetičkog niza s razlikom d iznosi $-d^2$. Odredi umnožak trećeg i petog člana tog niza.

2. Odredi sve prirodne brojeve n takve da se neka tri uzastopna koeficijenta u razvoju $(1+x)^n$ odnose kao $3:4:5$.

3. Dokaži da je za svaki prirodni broj n, broj

$$\underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n\text{ znamenaka}} - 3^n + 1$$

djeljiv brojem 7.

4. Odredi broj kompleksnih rješenja jednadžbe

$$z^{2019} = z + \bar{z}.$$

5. Kolika je vjerojatnost da za dva slučajno odabrana broja x, y iz skupa $[-2,2]$ vrijedi

$$|x| + |y| \geqslant 1 \qquad \text{i} \qquad ||x| - |y|| \leqslant 1?$$

* * *

6. Dana je točka $A(0,2)$ na paraboli $y^2 = x + 4$. Odredi sve točke B različite od A na danoj paraboli za koje postoji točka C, također na paraboli, takva da je kut $\sphericalangle ACB$ pravi.

7. Povlačenjem pravaca paralelnih sa svakom stranicom, jednakostranični trokut stranice duljine n podijeljen je na n^2 jednakostraničnih trokuta stranice duljine 1. Koliko najviše dužina duljine 1 na dobivenoj mreži možemo obojiti u crveno tako da nikoje tri crvene dužine ne tvore jednakostranični trokut?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.