Ministero della scienza e dell'istruzione della Repubblica di Croazia
Agenzia per l'educazione e la formazione
Società croata di matematica

COMPETIZIONE DI MATEMATICA — LIVELLO SCOLASTICO

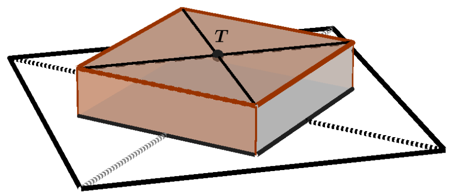
I classe — scuola media superiore — variante B

28 gennaio 2019

1. Se per tutti i numeri reali x e y risulta che $x - y = 6$ e $x^2 + y^2 = 22$, quant'è $x^3 - y^3$?

2. Determina tutti i numeri naturali n per i quali la frazione $\dfrac{4n}{4n - 2019}$ è un numero intero.

3. Mia desidera incartare il regalo di Natale, una scatola a forma di prisma quadrangolare. Possiede della carta da regalo a forma di quadrato. L'incartamento è possibile solo se posiziona diagonalmente la base quadrata della scatola, come nella figura, in modo che il centro della base coincida con il centro della carta quadrata. I quattro vertici della carta, dopo l'incartamento, coincidono con il centro T della base superiore, mentre i bordi della carta si incontrano lungo le diagonali, senza sovrapporsi. Calcola la superficie e le dimensioni della carta da regalo, se le dimensioni della scatola sono $20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$.



4. Dimostra che il numero $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ è divisibile con 900 per tutti i numeri naturali n.

5. Determina tutti i numeri di tre cifre i quali sono il triplo del quadrato della somma delle loro cifre.

* * *

6. Il punto P si trova all'interno di un triangolo equilatero in modo tale che dista dai suoi lati, in ordine, $3\,\text{cm}$, $4\,\text{cm}$ e $5\,\text{cm}$. Per il punto P è condotta una retta parallela al lato più vicino a P. Calcola la lunghezza dei lati del triangolo dato ed il rapporto in cui la retta parallela divide l'area del triangolo.

7. La media aritmetica della serie di numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è uguale a 100. Il maggiore di questi numeri è il numero di tre cifre x_n. Se lo scambiamo con $4x_n$, la media aritmetica della nuova serie di numeri equivale a 200. Qual è il massimo numero di termini di questa serie? In questo caso quale valore ha il numero x_n?

I primi cinque esercizi portano 6 punti, gli ultimi due 10 punti.

Ministero della scienza e dell'istruzione della Repubblica di Croazia
Agenzia per l'educazione e la formazione
Società croata di matematica

COMPETIZIONE DI MATEMATICA — LIVELLO SCOLASTICO

II classe — scuola media superiore — variante B

28 gennaio 2019

1. Se si somma il quadrato e il doppio del cubo di un certo numero, si ottiene la tripla quarta potenza dello stesso numero. Determina tutti i numeri reali per i quali questo è possibile.

2. Quanti numeri interi x soddisfano la disequazione $x^4 - 2020x^2 + 2019 < 0$?

3. Un pacco di carta per fotocopie, acquistato tramite Internet costa 9 kune di meno rispetto a quello acquistato in cartoleria. A dicembre la segretaria per 1440 kn ha acquistato on-line 8 pacchi in più rispetto a quelli acquistati in cartoleria a novembre, sempre per lo stesso importo. Qual è il prezzo di un pacco di carta per fotocopie, acquistato on-line?

4. Tutti e tre i vertici del triangolo ABC appartengono alla parabola di equazione $y = x^2 + 125$ in modo che il vertice A sta sul suo asse di simmetria e il lato $\overline{BC}$ è parallelo all'asse x. Se l'area del triangolo ABC risulta 125, determina le coordinate dei suoi vertici.

5. La lunghezza della base del triangolo isoscele ABC risulta essere $|BC| = 30\,\text{cm}$, mentre la lunghezza del lato $|AC| = 17\,\text{cm}$. Nel punto A è condotta la perpendicolare al lato AC. Determina il rapporto nel quale questa perpendicolare divide la base $\overline{BC}$.

* * *

6. Risolvi l'equazione

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + 4x - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = 112 - 4\sqrt{x}.$$

7. Calcola l'area dell'insieme dei punti, nel piano cartesiano complesso, definiti dalle soluzioni delle disequazioni $\operatorname{Im} z \geqslant |\operatorname{Re} z - 1|$, $|z - 1| \leqslant 1$.

I primi cinque esercizi portano 6 punti, gli ultimi due 10 punti.

Ministero della scienza e dell'istruzione della Repubblica di Croazia
Agenzia per l'educazione e la formazione
Società croata di matematica

COMPETIZIONE DI MATEMATICA — LIVELLO SCOLASTICO

III classe — scuola media superiore — variante B

28 gennaio 2019

1. Se $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, calcola $\sin^6 x + \cos^6 x$.

2. Quante soluzioni ha l'equazione $\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \dfrac{16}{\operatorname{tg} x}$ nell'intervallo $\langle 0, 2019\pi \rangle$?

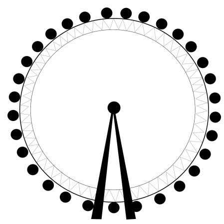
3. Per entrare in una pagina web Marco deve scegliere come codice PIN un numero di 4 cifre. Gli zeri all'inizio sono permessi, ma ci sono delle limitazioni (proibizioni) per il codice PIN. Una cifra non deve essere ripetuta tre o più volte nella serie. Ad esempio 0006 o 6666 non è un codice PIN ammesso, 0030 lo è. Infine, un paio di cifre non può essere ripetuto. Ad esempio 1616 non è un codice PIN ammesso, mentre lo è 1661 o 6611. In quanti modi Marco può scegliere il suo codice PIN?

4. Sia data una piramide quadrangolare regolare retta, i cui spigoli laterali racchiudono con il piano della base angoli di 60° e un cubo, che hanno basi congruenti. Determina il rapporto delle loro aree totali.

5. In un triangolo isoscele ABC, con l'angolo ottuso al vertice C, il piede dell'altezza sul lato $\overline{BC}$ è il punto D. Determina gli angoli del triangolo ABC se vale $\dfrac{|AB| + |BD|}{|AC| + |CD|} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

* * *

6. La ruota gigante con le gondole per i visitatori ha un raggio di 10 metri. Il punto più basso della ruota si trova a 2 metri dal suolo. La ruota gira con velocità costante e fa un giro completo in 100 secondi. La ruota inizia a muoversi quando la gondola si trova nel punto più basso. L'altezza $h(t)$ è la distanza della gondola dal suolo (in metri), t secondi dall'inizio del giro. Determina l'altezza $h(t)$ in funzione del tempo t. Per quanti secondi la gondola si trova a 17 metri di altezza (in un giro)?



7. È assegnato un quadrato di area $A = 7 - \log_2 x$ e un cubo di volume $V = \log_2 x - 2$. Determina il numero reale x se la lunghezza del lato del quadrato è di 1 maggiore rispetto alla lunghezza dello spigolo del cubo. Quanto misura il lato del quadrato e quanto lo spigolo del cubo?

I primi cinque esercizi portano 6 punti, gli ultimi due 10 punti.

Ministero della scienza e dell'istruzione della Repubblica di Croazia
Agenzia per l'educazione e la formazione
Società croata di matematica

COMPETIZIONE DI MATEMATICA — LIVELLO SCOLASTICO

IV classe — scuola media superiore — variante B

28 gennaio 2019

1. Nello sviluppo del binomio $\left(\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[8]{x}}\right)^{2019}$ trova il termine senza la x.

2. Risolvi la disequazione $4^{\sin^2 \pi x}+3\cdot 4^{\cos^2 \pi x}\leqslant 8$.

3. La retta $x-2y=0$ è l'asintoto dell'iperbole i cui fuochi si trovano nei punti $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$. Determina le coordinate di tutti i punti dell'iperbole dai quali si vede la distanza focale $\overline{F_1F_2}$ con un angolo retto.

4. Determina il più grande numero naturale n in modo che $\dfrac{500!}{7^n}$ sia un numero naturale.

5. La lunghezza dell'altezza di un cono retto è uguale al perimetro della base del cono. Qual è il rapporto tra il raggio della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta del cono?

* * *

6. Determina il numero di tre cifre la cui scrittura in base 11 comprende le stesse cifre come in base 9, ma in ordine inverso.

7. Determina tutti i numeri complessi per i quali $\operatorname{Re} z>0$ e $z^8+(1-4i)z^4-4i=0$.

I primi cinque esercizi portano 6 punti, gli ultimi due 10 punti.